PRÉPAS SCIENTIFIQUES

MPSI-MP2I

CONFORME AU PROGRAMME 2021

S. Bellec • G. Boutard • E. Thomas

Maths

TOUT-EN-UN

COURS • MÉTHODES • ENTRAÎNEMENTS • CORRIGÉS

Tout le cours avec :
- Les objectifs-clés du programme
- Les notions à maîtriser
- Les démonstrations incontournables

Entraînement intensif avec :
- Des vrai/faux
- Des exercices d'application
- Des exercices d'approfondissement
- Des problèmes type concours

Des fiches de révisions avec :
- La synthèse des notions
- Les méthodes pas à pas

Tous les corrigés détaillés

OFFERT EN LIGNE
- + de 250 **flashcards** interactives
- 25 **synthèses** à télécharger
- Tous les **scripts Python** interactifs

Vuibert

PRÉPAS SCIENTIFIQUES
MPSI-MP2I

CONFORME AU PROGRAMME 2021

Maths

TOUT-EN-UN

COURS • MÉTHODES • ENTRAÎNEMENTS • CORRIGÉS

Stevan Bellec est professeur en classes préparatoires scientifiques au Prytanée national militaire de La Flèche.

Geoffrey Boutard est professeur en classes préparatoires scientifiques au lycée Gay-Lussac à Limoges.

Erik Thomas est professeur en classes préparatoires scientifiques au lycée du Hainaut à Valenciennes.

Vuibert

Retrouvez notre collection complète ici :

ISBN : 978-2-311-40872-0

Conception couverture : Makaku - Emmanuel Linares

Conception et mise en page : Sébastien Mengin - Edilibre

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal. Le « photocopillage », c'est l'usage abusif et collectif de la photocopie sans autorisation des auteurs et des éditeurs. Largement répandu dans les établissements d'enseignement, le « photocopillage » menace l'avenir du livre, car il met en danger son équilibre économique. Il prive les auteurs d'une juste rémunération. En dehors de l'usage privé du copiste, toute reproduction totale ou partielle de cet ouvrage est interdite. Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au Centre français d'exploitation du droit de copie : 20, rue des Grands-Augustins, F-75006 Paris. Tél. : 01 44 07 47 70.

DANGER LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

© Vuibert – juin 2021 – 5, allée de la 2e D.B., 75015 Paris – Site Internet : http://www.vuibert.fr

SOMMAIRE

Ressources numériques

Pour accéder aux ressources numériques en ligne, retrouvez nos codes à flasher tout au long du livre :
- **Fiches synthèse** téléchargeables pour une révision nomade
- **Scripts Python** pour coder sur l'espace dédié
- **Exercices supplémentaires** pour poursuivre l'entraînement

Ressources numériques

Retrouvez des fiches et activités interactives en Python pour une remise à niveau efficace

lienmini.fr/40828-PYTHON

MODE D'EMPLOI

Cet ouvrage a été conçu comme un **outil de révisions** pratique et agréable pour l'élève. Des rubriques, agrémentées de **pictogrammes**, permettent une lecture non linéaire et des **points de repères** visuels.

À retenir
Pour réviser et maîtriser les notions et les définitions essentielles du programme. Elles sont à connaître par cœur.

Conseils méthodologiques
Pour acquérir les bons réflexes et éviter les pièges.

Attention !
Pour mettre en avant les points de vigilance.

D'autres rubriques, **Théorème**, **Proposition**, **Démonstration**, **Remarque**, **Exemple**, **etc.** viennent enrichir les cours et permettent une meilleure appropriation des contenus.

CHAPITRE 1

Rappel des outils de base

Plan du chapitre

Objectifs et compétences du programme

Capacités principales à maîtriser	Exercices associés
Connaître les méthodes de raisonnement.	Exercices 1, 2, 3
Rédiger un raisonnement par récurrence.	Exercices 4, D
Appréhender les manipulations entre ensembles, entre parties.	Exercices 5, 6, 8, B, C, E
Maîtriser les propriétés des applications.	Exercices 8, A, C, D, E, F
Savoir manipuler les symboles $\sum$ et $\prod$.	Exercices 10, 11, G
Montrer qu'une relation binaire est une relation d'équivalence ou une relation d'ordre.	Exercices 7, 8, 9

RETROUVEZ ICI LES FLASHCARDS INTERACTIVES POUR SE TESTER

www.lienmini.fr/40872-1

COURS

1 Rudiments de logique mathématiques

L'objectif de cette partie est de présenter le vocabulaire et quelques propriétés de logique qui seront largement utilisés dans la suite de ce livre. Aucun développement théorique ne sera fait.

1.1. Propositions mathématiques et assertions

On appelle proposition mathématique un énoncé auquel on peut attribuer une valeur de vérité (vrai ou faux). Deux propositions sont dites équivalentes si elles ont les mêmes valeurs de vérité.

On admettra qu'une proposition est soit vraie, soit fausse et jamais les deux à la fois. On appelle cela le principe du tiers exclu.

> **Exemple**
> Les énoncés suivants sont des propositions mathématiques :
> - $1+1=2$, cette proposition est vraie.
> - $1+1=3$, cette proposition est fausse.
> - $\pi=3{,}14$, cette proposition est fausse.
>
> Par contre, $1+1$ n'est pas une proposition puisqu'on ne peut pas lui attribuer de valeur de vérité. C'est une expression arithmétique dont le résultat est un réel.

Définition 1.1.

Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux propositions mathématiques.
- ET : la proposition « $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ » est vraie lorsque les deux propositions sont vraies et fausse sinon.
- OU : la proposition « $\mathscr{P}$ ou $\mathscr{Q}$ » est vraie lorsque au moins une des propositions est vraie.
- Un prédicat (ou propriété), est un énoncé mathématique dépendant d'une ou de plusieurs variables.

> **Exemple**
> « $\sqrt{x^2}=x$ » est un prédicat, cette propriété est vraie pour tout x plus grand que 0, mais est fausse sinon.

Pour définir les prédicats, il existe deux symboles mathématiques, appelés quantificateurs :
- Le quantificateur universel $\forall$ signifie « pour tout ».
- Le quantificateur existentiel $\exists$ signifie « il existe ».

Attention !

Les symboles $\forall$ et $\exists$ ne sont pas des abréviations et ne doivent pas être utilisés dans une phrase « en français ».

Remarque

On peut aussi écrire « $\exists!$ » pour dire « il existe un unique ».

L'ordre des quantificateurs est essentiel, on ne peut intervertir, sans justification, que deux quantificateurs de même nature. En effet, les propositions :
$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}\ /\ y > x$ et $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}\ /\ y > x$ ne sont pas équivalentes (la deuxième est fausse !).

La proposition *non* $\mathscr{P}$ qui est vraie lorsque $\mathscr{P}$ est fausse et est fausse lorsque $\mathscr{P}$ est vraie est appelée **négation** de $\mathscr{P}$.

> **Exemple**
> On considère la proposition $\mathscr{P}$: « tous les élèves de la classe ont eu la moyenne au dernier devoir », la négation de $\mathscr{P}$ est *non* $\mathscr{P}$: « au moins un élève n'a pas eu la moyenne au dernier devoir ».

À partir de cette définition, on peut vérifier que les propositions :

- $non\left[\forall x,\ \mathscr{P}(x)\right]$ et $\exists x,\ non\,\mathscr{P}(x)$ sont équivalentes ;
- $non\left[\exists x,\ \mathscr{P}(x)\right]$ et $\forall x,\ non\,\mathscr{P}(x)$ sont équivalentes ;
- $non\left[\mathscr{P}\ et\ \mathscr{Q}\right]$ et $\left[non\,\mathscr{P}\ \text{ou}\ non\,\mathscr{Q}\right]$ sont équivalentes ;
- $non\left[\mathscr{P}\ ou\ \mathscr{Q}\right]$ et $\left[non\,\mathscr{P}\ et\ non\,\mathscr{Q}\right]$ sont équivalentes.

> **Exemple**
> La négation de la proposition $\mathscr{P}$: « il fait froid et il y a du vent » est *non* $\mathscr{P}$: « il ne fait pas froid ou il n'y a pas de vent ».

On dit qu'une proposition $\mathscr{P}$ implique une proposition $\mathscr{Q}$, on note : $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$, si à chaque fois que $\mathscr{P}$ est vraie, $\mathscr{Q}$ l'est aussi. On dit alors que :

- $\mathscr{P}$ est une *condition suffisante* de $\mathscr{Q}$.
- $\mathscr{Q}$ est une *condition nécessaire* de $\mathscr{P}$.

Si $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$ et $\mathscr{Q} \Longrightarrow \mathscr{P}$, les propositions sont alors équivalentes, on note $\mathscr{P} \Longleftrightarrow \mathscr{Q}$.

> **Exemple**
> On considère les propositions $\mathscr{P}$: « il pleut » et $\mathscr{Q}$: « il y a des nuages ». Alors, $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$, autrement dit, $\mathscr{P}$ est une *condition suffisante* de $\mathscr{Q}$. Cependant, ces deux propositions ne sont pas équivalentes car il peut y avoir des nuages et ne pas pleuvoir (on a alors $\mathscr{Q}$ vraie et $\mathscr{P}$ fausse).

1.2. Montrer une implication

Dans cette partie, on se propose de présenter plusieurs façons de démontrer l'implication « $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$ ».

1.2.1. Démonstration « directe »

Pour démontrer une implication par déduction, on se base sur la propriété de transitivité suivante :

$$\text{Si } \left[\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q} \text{ et } \mathscr{Q} \Rightarrow \mathscr{R}\right] \text{ alors } \left[\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{R}\right].$$

Concrètement, pour démontrer cette implication, on suppose que $\mathscr{P}$ est vraie et, en utilisant des implications simples, on aboutit à la conclusion.

Exemple

Montrons que si n est divisible par 4, alors n est pair.
On suppose que n est divisible par 4, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 4k$.
En posant $k' = 2k$, on a : $n = 2k'$ et $k' \in \mathbb{Z}$, ce qui prouve que n est pair.
On a bien montré l'implication souhaitée.

1.2.2. Démonstration par disjonction de cas

Pour montrer l'implication « $\left[\mathscr{P}_1 \text{ ou } \mathscr{P}_2 \text{ ou } \dots \text{ ou } \mathscr{P}_n\right] \Longrightarrow \mathscr{Q}$ », on montre successivement les implications « $\mathscr{P}_k \Longrightarrow \mathscr{Q}$ » pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

Exemple

Montrons que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(2n+1)$ est un multiple de 3. Pour cela, on remarque qu'un nombre entier quelconque peut s'écrire de 3 façons possibles : $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$ où $k \in \mathbb{N}$.
On va donc procéder par disjonction de cas :

- s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k$, alors : $n(n+1)(2n+1) = 3k(n+1)(2n+1)$ qui est bien divisible par 3 ;
- s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k+1$, alors : $n(n+1)(2n+1) = 3(2k+1)n(n+1)$ qui est bien divisible par 3 ;
- s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k+2$, alors : $n(n+1)(2n+1) = 3(k+1)n(2n+1)$ qui est bien divisible par 3.

On en déduit que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.2.3. Démonstration par contraposée

On appelle contraposée de l'implication $[\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}]$ l'implication **équivalente**
$[\textit{non}\ \mathscr{Q} \Longrightarrow \textit{non}\ \mathscr{P}]$.

Exemple

On considère l'implication : s'il pleut, alors il y a des nuages. La contraposée de cette implication est : s'il n'y a pas de nuage, alors il ne pleut pas.

Dans certaines circonstances, pour montrer une implication, il peut être plus simple de montrer la contraposée.

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair. On va montrer la contraposée, c'est-à-dire : si n est impair alors n^2 est impair.
On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $n = 2k+1$. On a alors :

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

On voit que $2k^2 + 2k$ est un entier naturel, ce qui prouve que n^2 est un nombre impair.

1.2.4. Le raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer la proposition $\left(\mathscr{P} \text{ et } \textit{non}\ \mathscr{Q}\right)$ et en déduire une contradiction.

Exemple

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\forall \varepsilon > 0,\ x \leq \varepsilon$, alors $x \leq 0$. On va procéder par l'absurde.
On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, $x \leq \varepsilon$ et $x > 0$.
Par hypothèse, x est strictement positif, ce qui implique que $x > \frac{x}{2}$. On choisit alors $\varepsilon = \frac{x}{2}$, d'après la supposition de départ, on a : $x \leq \frac{x}{2}$. On aboutit à une contradiction, ce qui prouve le résultat souhaité.

1.2.5. Démontrer une équivalence

Pour montrer l'équivalence $\mathscr{P} \Longleftrightarrow \mathscr{Q}$, on montre les deux implications séparément.

Exemple

Soit A un réel positif et B un réel quelconque. Montrer l'équivalence :

$$\sqrt{A} = B \Longleftrightarrow \left[A = B^2 \text{ et } B \geq 0\right].$$

($\Rightarrow$) On suppose que $\sqrt{A} = B$. Par définition de la racine carrée, $A = B^2$ et $\sqrt{A}$ est positif, et donc B aussi.
($\Leftarrow$) On suppose que $A = B^2$ et $B \geq 0$. Alors : $\sqrt{A} = \sqrt{B^2} = |B|$. Comme B est un réel positif, on a : $|B| = B$, d'où : $\sqrt{A} = B$.

2 Les raisonnements à connaître

Dans cette partie, nous allons présenter des démonstrations classiques qu'il faut maîtriser en vue de résoudre les problèmes à venir dans les différents chapitres.

2.1. Le contre-exemple

On peut montrer qu'un prédicat universel « $\left(\forall x,\ \mathscr{P}(x)\right)$ », est faux en trouvant un contre-exemple : une valeur de x pour laquelle $\mathscr{P}(x)$ est fausse. C'est un principe important à comprendre et à utiliser pour vérifier certaines propriétés :

Exemple

On considère la proposition : pour tous réels positifs x et y, $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
Cette proposition est fausse, en effet, pour $x = 1$ et $y = 1$: $\sqrt{1+1} \neq \sqrt{1} + \sqrt{1}$.

Exemple

La proposition « tous les nombres entiers impairs sont premiers » est fausse, en effet, 9 est un nombre impair et n'est pas un nombre premier (9 est divisible par 3).

2.2. Les problèmes d'existence et/ou d'unicité

Prouver l'existence d'un objet mathématique vérifiant certaines propriétés est, en théorie, assez simple, il suffit d'exhiber un tel objet. En pratique, cela peut s'avérer très compliqué, car ne pas trouver d'exemple ne prouve pas qu'il n'en existe pas. Les preuves d'unicité sont quant à elles plus « systématiques » : on suppose qu'il existe deux objets vérifiant la proposition et on montre qu'ils sont égaux.

Exemple

Montrer qu'il existe un unique réel positif x tel que $x^2 = 1$.
Existence : Le réel $x = 1$ convient.
Unicité : On suppose qu'il existe deux réels positifs x et x' tels que $x^2 = x'^2 = 1$. Alors : $x = x'$ ou $x = -x'$. La seconde relation est exclue car alors x ou $-x'$ serait négatif. On en déduit que $x = x'$.

2.2.1. Le raisonnement par analyse-synthèse

Lorsque l'on veut démontrer une proposition $\mathscr{P}$ et que l'on n'a pas d'idée pour démarrer notre preuve (c'est notamment le cas lorsque l'on souhaite montrer l'existence d'un objet), on peut procéder en deux temps :

- L'**analyse** : On suppose que la proposition $\mathscr{P}$ est vraie et on en déduit des conditions nécessaires pour que cette proposition puisse effectivement être vraie.
- La **synthèse** : On vérifie que les conditions trouvées précédemment permettent bien de démontrer cette proposition.

Dans le cadre d'une preuve d'existence et d'unicité, l'analyse sert à déterminer des conditions sur l'objet recherché : on dresse son portrait robot. La synthèse, elle, permet de vérifier que cet objet fonctionne et que l'on ne s'est pas trompé de coupable.
Dans cette situation, l'analyse revient à prouver l'unicité de l'objet et la synthèse prouve l'existence.

Exemple

Montrons que toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire p et d'une fonction impaire i. On va procéder par analyse-synthèse.

Rappel

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
- f est paire si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$;
- f est impaire si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)$.

Analyse : On suppose qu'il existe p une fonction paire définie sur $\mathbb{R}$ et i une fonction impaire telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = p(x) + i(x)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, alors : $f(x) = p(x) + i(x)$ et $f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x)$. En additionnant ces deux relations, on obtient :

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}.$$

Si on soustrait ces deux relations, on a :

$$i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Synthèse : On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $p(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $i(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$. Il est clair que $f = p + i$. Vérifions que p est une fonction paire et i une fonction impaire. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ p(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = p(x).$$

p est une fonction paire. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ i(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -i(x).$$

i est bien une fonction impaire.Finalement, on a bien prouvé la proposition.

Le raisonnement par analyse-synthèse s'avère aussi très utile pour résoudre des équations :

> **Exemple**
>
> Résoudre l'équation $\sqrt{x+2} = x$ pour $x \in \mathbb{R}$.
> **Analyse** : Soit un réel x tel que $\sqrt{x+2} = x$. Alors, en élevant au carré, x est une solution de l'équation du second degré : $x+2 = x^2$ dont les racines sont : $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$. On en déduit que x est soit égal à -1, soit à 2.
> **Synthèse** : On vérifie si les deux candidats de l'analyse sont des solutions de l'équation. 2 convient parfaitement, par contre -1 ne fonctionne pas, en effet : $\sqrt{-1+2} = 1 \neq -1$.
>
> Finalement, l'équation $\sqrt{x+2} = x$ admet une unique solution réelle qui est 2.

2.3. Les raisonnements par récurrence

Avant de présenter les raisonnements par récurrence, nous allons donner une propriété importante de l'ensemble des entiers naturels que nous admettrons.

Proposition 1.2.

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Conséquence : Il n'existe pas de suite infinie d'entiers naturels strictement décroissante.

2.3.1. Le principe de récurrence

Proposition 1.3. Récurrence simple

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On considère une propriété (ou un prédicat) $\mathscr{P}_n$ définie pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ telle que :

- Initialisation : $\mathscr{P}_{n_0}$ est vraie ;
- Hérédité : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, si $\mathscr{P}_n$ est vraie, alors $\mathscr{P}_{n+1}$ l'est aussi.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, $\mathscr{P}_n$ est vraie.

Démonstration
On considère l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,\ \mathscr{P}_n \text{ est fausse}\}$.
On suppose que A est non vide, il admet donc un plus petit élément que nous noterons m qui est différent de n_0 (car $\mathscr{P}_{n_0}$ est vraie). Alors $m-1$ n'est pas dans A et donc l'entier suivant, m, n'est pas non plus dans A ce qui amène à une contradiction. On en déduit que A est vide. ■

> **Exemple**
>
> Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme S_n des n premiers entiers naturels est égale à $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
>
> Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}_n$: « $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ».
> **Initialisation :** Pour $n = 0$, $S_0 = 0$, la propriété est évidente.
> **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie, montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ l'est encore. Par définition : $S_{n+1} = S_n + (n+1)$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a : $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Ainsi : $S_{n+1} = \dfrac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.
$\mathscr{P}_{n+1}$ est bien vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On va maintenant présenter deux variantes du raisonnement par récurrence : la récurrence double et la récurrence forte.

2.3.2. La récurrence double

Proposition 1.4. Récurrence double

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On considère une propriété (ou un prédicat) $\mathscr{P}_n$ définie pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ telle que :

- Initialisation : $\mathscr{P}_{n_0}$ et $\mathscr{P}_{n_0+1}$ sont vraies ;
- Hérédité : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, si $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ sont vraies, alors $\mathscr{P}_{n+2}$ l'est aussi.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, $\mathscr{P}_n$ est vraie.

Exemple

On considère la suite de Fibonacci définie par : $u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathscr{P}_n$: « $u_n \in \mathbb{N}^*$ ».
Initialisation : Pour $n = 1$ et $n = 2$, la propriété est évidente.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ sont vraies, montrons que $\mathscr{P}_{n+2}$ l'est encore.
On a : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. La somme de deux entiers naturels non nuls est encore un entier naturel non nul, $\mathscr{P}_{n+2}$ est bien vraie.
D'après le principe de récurrence double, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2.3.3. La récurrence forte

Proposition 1.5. Récurrence forte

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On considère une propriété (ou un prédicat) $\mathscr{P}_n$ définie pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ telle que :

- Initialisation : $\mathscr{P}_{n_0}$ est vraie ;
- Hérédité : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, si, pour tout $k \in [\![n_0, n]\!]$, $\mathscr{P}_k$ est vraie, alors $\mathscr{P}_{n+1}$ l'est aussi.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, $\mathscr{P}_n$ est vraie.

Exemple

Montrons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, la propriété $\mathscr{P}_n$: « n admet une décomposition comme produit de nombres premiers ».
Initialisation : 2 est un nombre premier, donc $\mathscr{P}_2$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On suppose que $\mathscr{P}_k$ est vraie pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ l'est encore. Deux cas sont à considérer :

- soit $n+1$ est premier, dans ce cas, $\mathscr{P}_{n+1}$ est bien vraie ;
- soit $n+1$ n'est pas premier, alors, il existe deux entiers p et q avec $2 \leq p \leq n$ et $2 \leq q \leq n$ tels que $n+1 = pq$. Or, $\mathscr{P}_p$ et $\mathscr{P}_q$ sont vraies, donc p et q sont des produits de nombres premiers et $n+1$ aussi. $\mathscr{P}_{n+1}$ est encore vraie.

D'après le principe de récurrence forte, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

3 Inégalités

Définition 1.6. Relations $\leq$ et $<$

- Soient x et y deux réels. On dit que x est inférieur à y, et on note $x \leq y$ ou $y \geq x$, si $y - x$ est un réel positif.
- Si x et y sont deux réels différents tels que $x \leq y$, on note $x < y$ ou $y > x$.

Proposition 1.7. Compatibilité

Soient x, y, z et t quatre réels.
- Si $x \leq y$ et $z \leq t$, alors $x + z \leq y + t$.
- Si $0 \leq x \leq y$ et $0 \leq z \leq t$, alors $0 \leq xz \leq yt$.

Démonstration
- On a $y + t - (x + z) = \big(y - x\big) + (t - z) \in \mathbb{R}_+$ car $y - x$ et $t - z$ sont des réels positifs.
- On a $yt - xz = yt - yz + yz - xz = y(t - z) + z\big(y - x\big) \in \mathbb{R}_+$ car $t \leq z$, $x \leq y$, $y \in \mathbb{R}_+$ et $z \in \mathbb{R}_+$.

■

Définition 1.8. Valeur absolue

Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit $|x|$ par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Remarques
- Par définition, $|x| \geq 0$ pour tout réel x.
- Pour tout réel x, $\sqrt{x^2} = |x|$.
- Pour tout réel x, $|x| = \max\{x, -x\}$.

Exemples
- On a $|3| = 3$ et $|-\pi| = \pi$.
- On se propose de donner une expression de $|3x - 4|$ sans valeur absolue. Le tableau de signe de $3x - 4$ est :

x	$-\infty$		$4/3$		$+\infty$
$3x - 4$		$-$	0	$+$	

On en déduit donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |3x - 4| = \begin{cases} 3x - 4 & \text{si } x \geq 4/3 \\ 4 - 3x & \text{si } x < 4/3 \end{cases}.$$

Proposition 1.9. Propriétés

Soient x et y deux réels. On a :
- $|-x| = |x|$;
- $|xy| = |x| \times |y|$;
- $|x+y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire) ;
- $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$.

Démonstration
- C'est clair par définition de la valeur absolue.
- C'est clair en utilisant le fait que $|x| = \sqrt{x^2}$.
- On va procéder par disjonction de cas :
  - ⋆ Si x et y sont positifs, alors $|x+y| = x+y = |x|+|y|$, l'inégalité est vérifiée dans ce cas.
  - ⋆ Si x et y sont négatifs, alors $|x+y| = -x-y = |x|+|y|$, l'inégalité est vérifiée dans ce cas.
  - ⋆ Si x et y sont de signe contraire, par exemple x positif et y négatif. Sans perte de généralité, on peut supposer que $|x| \geq |y|$. On alors $x+y \geq 0$, ainsi $|x+y| = x+y \leq x-y = |x|+|y|$.
- Cette inégalité est juste une conséquence de l'inégalité triangulaire. On a :

$$|x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y|,$$

donc $|x| - |y| \leq |x-y|$. On montre de même que $|y| - |x| \leq |x-y|$, donc $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$.

■

Proposition 1.10.

Soient a et b deux réels. Soit $\mathscr{S}_{a,b} = \{x \in \mathbb{R},\ |x-a| \leq b\}$. Alors

$$\mathscr{S}_{a,b} = \begin{cases} \varnothing & \text{si } b < 0 \\ [a-b, a+b] & \text{si } b \geq 0 \end{cases}.$$

Démonstration
- Si $b < 0$, comme $|x-a| \geq 0$ (par définition d'une valeur absolue), on a $\mathscr{S}_{a,b} = \varnothing$.
- Si $b \geq 0$. Si $x \geq a$, alors on a :

$$|x-a| \leq b \iff x-a \leq b \iff x \leq a+b \iff x \in [a, a+b].$$

De même, si $x < a$,

$$|x-a| \leq b \iff a-x \leq b \Leftrightarrow a-b \leq x \iff x \in [a-b, a[.$$

On en déduit que $x \in [a-b, a+b]$.

■

Exemple

On se propose de résoudre l'inéquation $|2x+3| > 1$. Pour cela, notons que :

$$|2x+3| > 1 \Longleftrightarrow \left|x + \frac{3}{2}\right| > \frac{1}{2}.$$

Or, $\left|x + \frac{3}{2}\right| \leq \frac{1}{2}$ si et seulement si $x \in [-2, -1]$. Finalement :

$$|2x+3| > 1 \Longleftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]-1, +\infty[.$$

Définitions 1.11. Partie minorée, majorée, bornée

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que :
- A est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$, $x \geq m$;
- A est minorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$, $x \leq M$;
- A est bornée si A est minorée et majorée.

Exemples
- L'intervalle $[a, b]$ est majoré par $b+1$ et minoré par $a-3$.
- L'ensemble $\{\cos(n),\ n \in \mathbb{N}\}$ est majoré par 1 et minoré par -1.

Définitions 1.12. Majorant, minorant

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.
- Si A est minorée, on appelle minorant tout réel m tel que pour tout $x \in A$, $x \geq m$.
- Si A est majorée, on appelle majorant tout réel M tel que pour tout $x \in A$, $x \leq M$.

Remarque

Si M est un majorant (resp. m est un minorant) d'une partie non vide A de $\mathbb{R}$, tout réel supérieur ou égal à M est un majorant de A (resp. tout réel inférieur ou égal à m est un minorant de A). On veillera à ne pas parler du majorant (ou du minorant) d'une partie, mais d'un majorant (ou d'un minorant).

Définitions 1.13. Plus grand élément, plus petit élément

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que :
- m est le plus petit élément si, $m \in A$ et pour tout $x \in A$, $m \leq x$;
- M est le plus grand élément si, $M \in A$ et pour tout $x \in A$, $M \geq x$.

Remarque

S'il existe, un tel élément est unique, donc on parle bien du plus petit élément/du plus grand élément.

Exemples
- L'intervalle $]-1, 2[$ est évidemment borné mais n'admet ni plus petit, ni plus grand élément. Par contre, l'intervalle $[-1, 2]$ admet un plus petit élément (qui est -1) et un plus grand élément (qui est 2).
- L'ensemble $\left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ admet un plus grand élément qui est 1 mais n'admet pas de plus petit élément.

Définition 1.14. Partie entière

Soit x un réel. L'ensemble $\{n \in \mathbb{Z},\ n \leq x\}$ admet un plus grand élément, que l'on note $\lfloor x \rfloor$ et que l'on appelle partie entière de x.

Remarques

- La partie entière d'un réel est un entier relatif.
- Pour tout réel x, on a $\lfloor x\rfloor \leq x < \lfloor x\rfloor + 1$. Cet encadrement peut être très utile pour enlever une partie entière, en effet :
$$\lfloor x\rfloor = k \Longleftrightarrow k \leq \lfloor x\rfloor < k+1.$$

Exemples

- On a $\lfloor 3\rfloor = 3$, $\lfloor \sqrt{2}\rfloor = 1$ et $\lfloor -1{,}7\rfloor = -2$.
- On se propose de résoudre l'équation $\lfloor 2x+3\rfloor = 3$. On a :
$$\lfloor 2x+3\rfloor = 3 \iff 3 \leq 2x+3 < 4 \iff 0 \leq x < \frac{1}{2}.$$

4 Les ensembles

En mathématiques, un ensemble est une « collection » d'objets (réels, entiers, fonctions,...) appelés éléments. Pour manipuler un ensemble, on a besoin de le définir clairement à travers des notations. On en connaît déjà plusieurs qui définissent des ensembles particuliers :

- $\mathbb{N}$: l'ensemble des entiers naturels ;
- $\mathbb{Z}$: l'ensemble des entiers relatifs ;
- $\mathbb{Q}$: l'ensemble des nombres rationnels (ce sont les nombres qui peuvent s'écrire comme une fraction de deux entiers) ;
- $\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels ;
- $\mathbb{C}$: l'ensemble des nombres complexes (voir chapitre 3).

Vous avez également manipuler d'autres ensembles :

- $[a, b]$ l'intervalle constitué de tous les nombres réels supérieurs ou égaux à a et inférieurs ou égaux à b.
- $[\![a, b]\!]$ l'ensemble des nombres entiers supérieurs ou égaux à a et inférieurs ou égaux à b.

Tout au long de ce livre, nous introduirons plusieurs autres notations.
Il existe d'autres ensembles qui ne nécessitent pas de notations particulières, pour ceux là, il existe deux façons de les noter :

- La notation en compréhension : on décrit l'ensemble comme une partie d'un ensemble plus grand formée des éléments vérifiant plusieurs propriétés. Par exemple :
$$A = \left\{x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 1\right\}.$$
- La notation en extension : on décrit l'ensemble par la liste explicite des éléments qui composent cet ensemble. Par exemple :
$$B = \left\{0, 2, 4, \dots\right\} = \left\{2k,\ k \in \mathbb{N}\right\}.$$

Exemples

L'ensemble E des multiples de 3 peut s'écrire : $E = \left\{3k,\ k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{n \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z},\ n = 3k\right\}$, on pourra noter $E = 3\mathbb{Z}$.
On a également :

- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^*\right\}$;
- $\mathbb{D} = \left\{\frac{n}{10^p},\ n \in \mathbb{Z},\ p \in \mathbb{N}\right\}$;
- $\mathbb{R}_- = \left\{x \in \mathbb{R},\ x \leq 0\right\}$;
- $\mathbb{R}_+ = \left\{x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\right\}$;
- $\mathbb{R}^* = \left\{x \in \mathbb{R},\ x \neq 0\right\}$.

4.1. Généralités

Définition 1.15.

Soient E et F deux ensembles.

- On note $e \in E$ pour dire que l'élément e appartient à l'ensemble E.
- L'ensemble ne contenant aucun élément se note $\varnothing$ que l'on nomme ensemble vide.
- Un singleton est un ensemble ne contenant qu'un seul élément.
- On dit que deux ensembles sont égaux s'ils contiennent les mêmes éléments.
- On dit que E est inclus dans F si : $\forall x \in E,\ x \in F$. On note $E \subset F$ et on dit que E est un sous-ensemble de F ou encore que E est une partie de F.
- Deux ensembles E et F sont égaux si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.

Définition 1.16.

Soit E un ensemble. L'ensemble des sous-ensembles de E forme un ensemble appelé ensemble des parties de E et est noté $\mathscr{P}(E)$. Autrement dit :

$$A \in \mathscr{P}(E) \Longleftrightarrow A \subset E.$$

Remarque

L'ensemble vide et E sont deux éléments de $\mathscr{P}(E)$.

Exemple

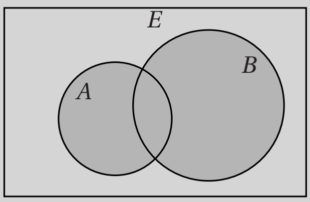
Soit $E = \{a, b, c\}$, alors $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$.

4.2. Opérations et ensembles

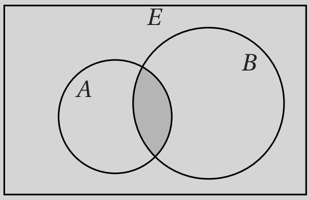
Définition 1.17.

Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E.

- La réunion de A et B notée $A \cup B$ est le sous-ensemble de E constitué des éléments qui sont dans A ou dans B : $A \cup B = \{x \in E,\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
  Sur la figure ci-dessous, l'union de A et B correspond à la zone grisée.



- L'intersection de A et B notée $A \cap B$ est le sous-ensemble de E constitué des éléments qui sont dans A et dans B : $A \cap B = \left\{x \in E,\ x \in A \text{ et } x \in B\right\}$.
  Sur la figure ci-dessous, l'intersection de A et B correspond à la zone grisée.



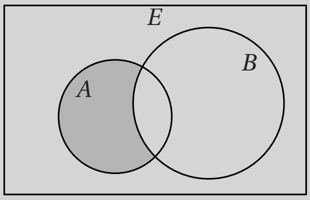
Ces définitions se généralisent à une famille de sous-ensembles de E : $\left\{A_i \subset E,\ i \in I\right\}$ (ici I est un ensemble permettant de différentier les sous-ensembles A_i) :

- La réunion des A_i, i décrivant I, le sous-ensemble de E constitué des éléments qui sont dans au moins un des A_i : $\bigcup_{i \in I} A_i = \left\{x \in E, \exists i \in I,\ x \in A_i\right\}$.
- L'intersection des A_i, i décrivant I, le sous-ensemble de E constitué des éléments qui sont dans tous les A_i : $\bigcap_{i \in I} A_i = \left\{x \in E, \forall i \in I,\ x \in A_i\right\}$.

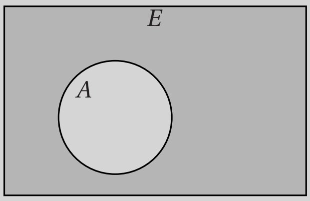
Définition 1.18.

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

- On définit la différence de B dans A l'ensemble : $A \backslash B = \left\{x \in A,\ x \notin B\right\}$.
  Sur la figure ci-dessous, la différence de B dans A correspond à la zone grisée.



- L'ensemble $E \backslash A$ est appelé complémentaire de A dans E. Il est noté $\overline{A}$ ou A^c s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble E.
  Sur la figure ci-dessous, le complémentaire de A dans E correspond à la zone grisée.



COURS

Proposition 1.19.

Soient A, B et C trois sous-ensembles de E. Alors :

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cup (B \cup C)$.
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Remarque

La troisième et la quatrième égalité (en lisant en colonne) s'appellent les lois de De Morgan.

Démonstration

On prouve ces égalités en procédant par double inclusions. ∎

Définition 1.20. Produit cartésien

Soit $E_1, E_2, \ldots, E_n$ désignent n ensembles, on définit le produit cartésien $E_1 \times \ldots \times E_n$ comme l'ensemble :

$$E_1 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, \ldots, x_n),\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \in E_i\}.$$

Lorsque pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $E_i = E$, on note : $E \times \cdots \times E = E^n$.

Remarque

Il ne faut pas confondre les ensembles $\{(1,2)\}$ (qui contient un seul élément) et $\{1,2\}$ (qui en contient deux).

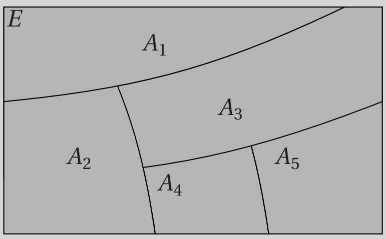
4.3. Partition d'un ensemble

Définition 1.21. Partition d'un ensemble

Une partition d'un ensemble E est une famille de sous-ensembles $(A_i)_{i \in I}$ de E vérifiant :

- $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ A_i \cap A_j = \varnothing$ (on dit que les ensembles sont deux à deux disjoints) ;
- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$.

Sur la figure ci-dessous, on a représenté une partition d'un ensemble E.



Exemple

On note $P = \{2k,\ k \in \mathbb{N}\}$ et $I = \{2k+1,\ k \in \mathbb{N}\}$. La famille $\{P, I\}$ forme une partition de $\mathbb{N}$.

5 Les applications

5.1. Généralités

Définition 1.22. Application

Une application (ou fonction) de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. Pour désigner une application, on notera $f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$.

L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathscr{F}(E,F)$ ou encore F^E.

Remarque

Deux fonctions f et g sont égales si et seulement si elles ont le **même ensemble de départ** E, **même ensemble d'arrivée** F et si, pour tout $x \in E$: $f(x) = g(x)$.

Il y a quelques applications qu'il est important de connaître et qui nous seront très utiles pour la suite.

Définition 1.23. Application identité

Soit E un ensemble. On appelle application identité de E et on note id_E l'application de E dans E définie par : $\forall x \in E,\ \mathrm{id}_E(x) = x$.

Définition 1.24. Indicatrice

Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle indicatrice de A, notée $\mathbb{1}_A$, est l'application de E à valeur dans $\{0,1\}$ définie par : $\forall x \in E,\ \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Définition 1.25. Graphe d'une application

On appelle graphe, noté Γ, d'une application $f : E \to F$ le sous ensemble de $E \times F$ défini par :

$$\Gamma = \{(x, f(x)),\ x \in E\}.$$

Il arrive que l'on étende ou que l'on réduise l'ensemble de départ d'une application pour faire apparaître certaines propriétés.

Définition 1.26.

Soient E et F deux ensembles et A une partie de E.

- Soit $f : E \to F$ une application. On appelle restriction de f au sous-ensemble A, notée $f_{|A}$ l'application définie par $f_{|A}: \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$.
- Si f est une application de A dans F, on appelle prolongement de f à E toute application $g : E \to F$ vérifiant pour tout $x \in A$: $g(x) = f(x)$.

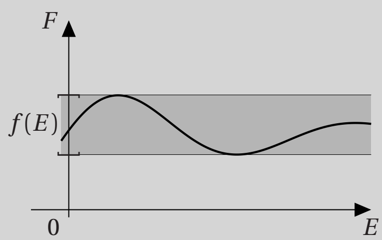
Exemple

- Considérons l'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$. Alors $f_{|\mathbb{R}_+} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+}$.
- L'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\ln x \end{array}$ peut se prolonger en une fonction $\tilde{f}$ définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ en posant $\tilde{f}(0) = 0$.

5.2. Applications et ensembles

Définition 1.27. Image directe

Soient $f: E \rightarrow F$ une application et A un sous-ensemble de E. On appelle image directe de A par f, la partie de F, notée $f(A)$, définie par : $f(A) = \{f(x),\ x \in A\}$.
En particulier, $f(E) = \mathrm{Im} f$ est appelée image de f.

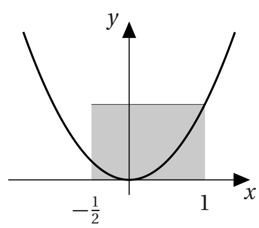


Exemple

On considère l'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$. Notons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$. Ainsi $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+$. On peut également montrer que tout élément de $\mathbb{R}_+$ admet un antécédent dans $\mathbb{R}$ par f (c'est la définition de la racine carrée), ainsi $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$.
Avec une étude similaire, on peut montrer que

$$f([-1/2, 1]) = [0, 1],$$

ce qui est illustré sur la figure ci-contre.



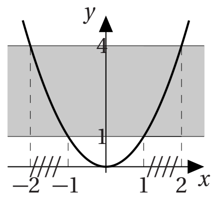
Définition 1.28. Image réciproque

Soient $f: E \rightarrow F$ une application et B un sous-ensemble de F. On appelle image réciproque de B par f, la partie de E, notée $f^{-1}(B)$, définie par : $f^{-1}(B) = \{x \in E,\ f(x) \in B\}$.

Exemple

On considère l'application $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$.

Un carré étant toujours positif, on a : $f^{-1}(\mathbb{R}_-^*) = \varnothing$.
De même, 1 admet deux antécédents 1 et -1, ainsi : $f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}$. Enfin, à partir du schéma ci-contre, on a $f^{-1}([1,4]) = [-2,-1] \cup [1,2]$.



5.3. Composition

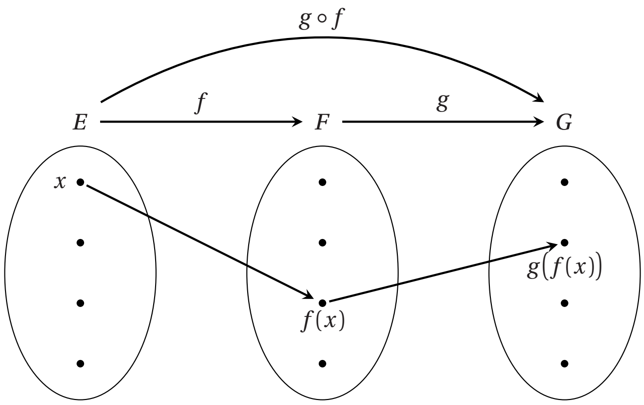
Définition 1.29. Composition d'applications

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. La composée de g et f est l'application notée $g \circ f$ définie par :

$$g \circ f : \begin{array}{rcl} E & \to & G \\ x & \mapsto & g\big(f(x)\big) \end{array}$$

Remarque

Pour que $g \circ f$ existe, l'ensemble d'arrivée de f doit être inclus dans l'ensemble de départ de g. On peut illustrer la composée de deux applications comme ceci :



Lorsque l'application $g \circ f$ existe, $f \circ g$ n'existe pas forcément. Si jamais les deux existent, en général, $f \circ g \neq g \circ f$.

Exemple

On considère les deux applications $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$ et $g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln x \end{array}$.

On a $f \circ g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\ln x} \end{array}$. Par contre $g \circ f$ n'existe pas puisque $f(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}^*$ n'est pas un sous-ensemble de l'ensemble de départ de g, en effet, -1 n'admet pas d'image par $g \circ f$ par exemple.
Par contre, $g \circ f_{|\mathbb{R}_+^*}$ existe.

COURS

Exemple

On considère les deux applications $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ et $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$.

On a alors $f \circ g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x}^2 = x \end{array}$, ainsi $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+}$.

Par contre $g \circ f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2} = |x| \end{array}$.

Proposition 1.30. Associativité de la composition

Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications, alors :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Démonstration

La preuve est claire et découle de la définition de $\circ$. ■

Remarque

L'associativité de $\circ$ est importante : elle indique que l'on peut faire les opérations de composition (lorsque que l'on peut les faire) dans l'ordre que l'on veut. Ainsi, on notera $h \circ g \circ f$ pour indiquer $h \circ (g \circ f)$ ou $(h \circ g) \circ f$.

Proposition 1.31.

Si $f : E \to E$ est une application, alors $f \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E \circ f = f$.

Démonstration

La preuve est claire et découle des définitions de $\circ$ et id_E. ■

Définition 1.32.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et une application $f : E \to E$. On définit la n-ième itérée de f par :

$$f^0 = \mathrm{id}_E,\ f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

5.4. Injection, surjection, bijection

5.4.1. Application injective

Définition 1.33. Application injective

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est injective si :

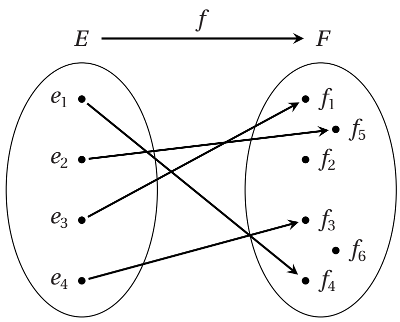
$$\forall (x, x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Une application injective est une application pour laquelle tous les éléments de l'ensemble de départ ont des images différentes par f. La figure page suivante illustre cela. En effet, aucun des éléments e_i n'ont la même image. Il peut exister des éléments de F qui n'ont aucun antécédent (f_6 sur ce schéma).

Remarque

Soit $f : E \to F$ une application. On peut reformuler la définition d'injectivité de f de deux manières :

- Tout élément de F admet au plus un antécédent par f.
- Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet au plus une solution dans E.



Exemple

L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas injective, en effet $f(1) = f(-1) = 1$. Cependant, en changeant l'ensemble de départ, on peut obtenir une application qui est injective, par exemple $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$.

Proposition 1.34.

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.

Démonstration

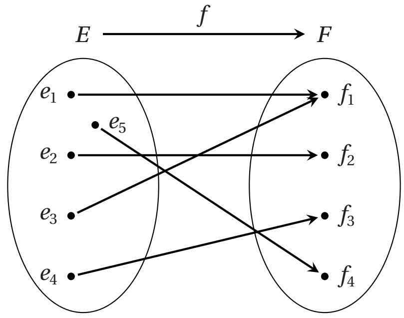
Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$, alors : $g\big[f(x)\big] = g\big[f(x')\big]$. Cependant, g est une application injective, ainsi : $f(x) = f(x')$. On utilise maintenant l'injectivité de f pour obtenir que $x = x'$. On a bien montrer que $g \circ f$ est injective. ■

5.4.2. Application surjective

Définition 1.35. Application surjective

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est surjective si tout élément de F admet au moins un antécédent par f, autrement dit, si : $\forall y \in F,\ \exists x \in E \ \ f(x) = y$.

Une application surjective est une application pour laquelle tous les éléments de l'ensemble d'arrivée admettent au moins un antécédent dans E par f. La figure suivante illustre cela. Tous les éléments de F possèdent au moins un antécédent, certains en ont même plus (f_1).



Exemple

L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas surjective, en effet le réel -1 n'admet pas d'antécédents réels. Par contre $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est une application surjective.

Proposition 1.36.

Soit $f : E \longrightarrow F$, f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

Démonstration

($\Rightarrow$) On suppose que f est surjective.
Par définition, $f(E) \subset F$. On va montrer l'autre inclusion. Soit $y \in F$, comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, autrement dit, $y \in f(E)$.
On a bien $F \subset f(E)$ et donc $f(E) = F$.
($\Leftarrow$) On suppose que $f(E) = F$.
Soit $y \in F$, alors $y \in f(E)$ ce qui revient à dire que : $\exists x \in E,\ y = f(x)$. f est bien une application surjective.

■

Proposition 1.37.

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

Démonstration

Soit $z \in F$, par surjectivité de l'application g, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$.
L'application f étant surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Par conséquent : $z = g\big(f(x)\big) = g \circ f(x)$. Finalement, on a montré que :

$$\forall z \in G,\ \exists x \in E,\ z = f \circ g(x).$$

■

5.4.3. Application bijective

Définition 1.38. Application bijective

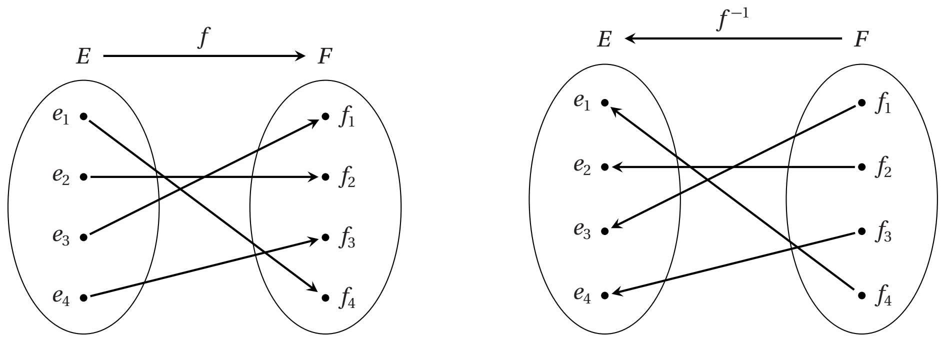
Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est bijective si elle est injective et surjective. Autrement dit, f est bijective si et seulement si tout élément de F admet exactement un antécédent par f. L'application $f : E \to F$ est donc bijective si et seulement si :

$$\forall y \in F, \exists! x \in E \;\; f(x) = y.$$

Théorème 1.39.

Une application $f : E \to F$ est bijective si et seulement s'il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$. L'application g est alors appelée application réciproque de f et est notée f^{-1}.

Une application bijective est une application pour laquelle tous les éléments de l'ensemble d'arrivée admettent exactement un antécédent dans E par f. Il est possible de construire une nouvelle application qui à un élément de F lui associe son unique antécédent par f dans E, c'est l'application f^{-1}. Le schéma ci-dessous illustre cela :



Exemple

On a vu précédemment que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est injective et surjective. C'est donc une application bijective. Son application réciproque est $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$.

L'application $\ln : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln x \end{array}$ est bijective, son application réciproque est $\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x \end{array}$.

Proposition 1.40.

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et sa bijection réciproque est $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration

f et g sont injectives, donc $g \circ f$ est aussi injective.
f et g sont surjectives, donc $g \circ f$ est aussi surjective.
Par conséquent, $g \circ f$ est bijective.
Il nous reste à vérifier que :

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_F,\ (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E.$$

Ainsi : $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. ■

6 Les relations binaires

Définition 1.41. Relation binaire

Soit E un ensemble. On appelle relation binaire $\mathscr{R}$ sur E la donnée d'un ensemble $G \subset E^2$. On dit alors que x est en relation avec y, ce qui se note $x \mathscr{R} y$, si et seulement si $(x, y) \in G$.

Définition 1.42.

Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur un ensemble E. On dit que $\mathscr{R}$ est :

- réflexive si pour tout $x \in E$: $x \mathscr{R} x$;
- symétrique si pour tout $(x, y) \in E^2$: $x \mathscr{R} y \Longrightarrow y \mathscr{R} x$;
- antisymétrique si pour tout $(x, y) \in E^2$: $\left[x \mathscr{R} y \text{ et } y \mathscr{R} x\right] \Longrightarrow x = y$;
- transitive si pour tout $(x, y, z) \in E^3$: $\left[x \mathscr{R} y \text{ et } y \mathscr{R} z\right] \Longrightarrow x \mathscr{R} z$.

Exemples

- Soit E un ensemble quelconque. La relation d'égalité sur E est réflexive, transitive, symétrique et antisymétrique.
- La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est réflexive, transitive et antisymétrique. Elle n'est pas symétrique.
- Soit E un ensemble quelconque. La relation d'inclusion sur $\mathscr{P}(E)$ est réflexive, transitive et antisymétrique.

6.1. Relation d'équivalence

Définition 1.43. Relation d'équivalence

On appelle relation d'équivalence toute relation binaire réflexive, symétrique et transitive sur un ensemble non vide.

Exemples

- Soit $(z, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$.
  - Deux réels x et y sont congrus modulo z, noté $x \equiv y\,[z]$, s'il existe un entier k tel que $x = y + kz$.
  - Deux entiers m et n sont congrus modulo p, noté $n \equiv m\,[p]$, s'il existe un entier k tel que $n = m + kp$.

  On peut vérifier que les congruences sont des relations d'équivalence.

- Si $f : E \to F$ est une application entre deux ensembles E et F, la relation binaire $\mathscr{R}$ définie sur E par :
$$\forall (x,y) \in E^2, \quad x \mathscr{R} y \iff f(x) = f(y)$$
est une relation d'équivalence sur E.

Définition 1.44. Classe d'équivalence

Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E et $x \in E$. On appelle classe d'équivalence de x pour $\mathscr{R}$ l'ensemble, noté $\overline{x}$, défini par :
$$\overline{x} = \left\{y \in E,\ x \mathscr{R} y\right\}.$$

Proposition 1.45.

Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Les classes d'équivalence forment une partition de E.

Démonstration

- Il est clair que $E = \bigcup_{x \in E} \overline{x}$ car pour tout $x \in E$, $x \in \overline{x}$.
- La définition de la relation d'équivalence assure que pour tous x et y dans E, on a $\overline{x} \cap \overline{y} = \varnothing$ ou $\overline{x} = \overline{y}$.

Il s'ensuit que les classes d'équivalence forment une partition de E.

■

Exemple

On considère la relation $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $x \mathscr{R} y \iff xy > 0$. Alors $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence qui a deux classes d'équivalences : $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

6.2. Relation d'ordre

Définition 1.46. Relation d'ordre

Une relation d'ordre sur un ensemble E est une relation binaire $\mathscr{R}$ réflexive, antisymétrique et transitive. Lorsqu'une telle relation $\mathscr{R}$ existe, on dit que $(E, \mathscr{R})$ est un ensemble ordonné.

Exemples

- Les relations $\leq$ et $\geq$ sur $\mathbb{R}$ sont des relations d'ordre.
- Dans $\mathbb{N}^*$, la relation de divisibilité définie par : $a \mathscr{R} b$ si, et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $b = ka$ est une relation d'ordre.

Définition 1.47.

Soit $\mathscr{R}$ une relation d'ordre sur E.

- On dit que l'ordre est total si on peut toujours comparer deux éléments de E : pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $x \mathscr{R} y$ ou $y \mathscr{R} x$. Dans le cas contraire, on dit que l'ordre est partiel.
- Si A est une partie de E et M est un élément de E, on dit que M est un majorant de A si, pour tout $x \in A$, on a $x \mathscr{R} M$.

7 Sommes et produits

7.1. Généralités

Définition 1.48. Somme et produit

Soit $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$ un ensemble fini non vide. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels. On définit :

- $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i$ (et on lit « somme sur I des u_i ») par
$$\sum_{i\in I} u_i = u_{i_1} + \cdots + u_{i_n}.$$
- $\displaystyle\prod_{i\in I} u_i$ (et on lit « produit sur I des u_i ») par
$$\prod_{i\in I} u_i = u_{i_1} \times \cdots \times u_{i_n}.$$

Lorsque I est vide, on pose $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = 0$ et $\displaystyle\prod_{i\in I} u_i = 1$.

Notation

Lorsque $I = [\![a, b]\!]$ avec $a \leq b$ deux entiers naturels, on note $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i=a}^{b} u_i$ et $\prod_{i\in I} u_i = \prod_{i=a}^{b} u_i$.

Remarques

- La lettre « i » est dite « muette » car on peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre j, ℓ, etc.
- Si a et b sont des entiers naturels tels que $a \leq b$, la somme $\displaystyle\sum_{i=a}^{b} u_i$ comporte $b - a + 1$ termes.

Exemples

- On a $\displaystyle\sum_{i=3}^{10} 5 = \underbrace{5 + \cdots + 5}_{10-3+1 \text{ termes}} = 5 \times (10 - 3 + 1) = 40.$
- Si n est un entier naturel, $\displaystyle\sum_{i=1}^{2n} (-1)^i = -1 + 1 - 1 + \cdots - 1 + 1 = 0$ car les termes se détruisent deux à deux.

Proposition 1.49. Propriétés

Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels indéxées sur un ensemble fini I. Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ et soient I_1 et I_2 deux parties de I telles que $I=I_1\cup I_2$ avec $I_1\cap I_2=\varnothing$, on a :

- $\displaystyle\sum_{i\in I}(\lambda u_i+\mu v_i)=\lambda\sum_{i\in I}u_i+\mu\sum_{i\in I}v_i$;
- $\displaystyle\sum_{i\in I}u_i=\sum_{i\in I_1}u_i+\sum_{i\in I_2}u_i$;
- $\displaystyle\sum_{i\in I}\lambda u_i v_i=\lambda^n\prod_{i\in I}u_i\times\prod_{i\in I}v_i$ où n est le nombre d'éléments de I ;
- $\displaystyle\prod_{i\in I}u_i=\prod_{i\in I_1}u_i\prod_{i\in I_2}u_i$.

Démonstration

Nous prouvons uniquement les deux premiers points, les deux autres se prouvent de manière analogue. On écrit $I=\{i_1,\dots,i_n\}$ et, quitte à renuméroter, on pose $I_1=\{i_1,\dots,i_r\}$ et $I_2=\{i_{r+1},\dots,i_n\}$ avec $r\in[\![1,n]\!]$.

- On a :

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I}(\lambda u_i+\mu v_i) &= (\lambda u_{i_1}+\mu v_{i_1})+\cdots+(\lambda u_{i_n}+\mu v_{i_n})\\ &= \lambda(u_{i_1}+\cdots+u_{i_n})+\mu(v_{i_1}+\cdots+v_{i_n})\\ &= \lambda\sum_{i\in I}u_i+\mu\sum_{i\in I}v_i.\end{aligned}$$

- On a :

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I_1}u_i+\sum_{i\in I_2}u_i &= (u_{i_1}+\cdots+u_{i_r})+(u_{i_{r+1}}+\cdots+u_{i_n})\\ &= u_{i_1}+\cdots+u_{i_r}+u_{i_{r+1}}+\cdots+u_{i_n}\\ &= \sum_{i\in I}u_i.\end{aligned}$$

■

Proposition 1.50. Changement de variable

Soient I et J deux ensembles finis. On suppose qu'il existe une bijection $\varphi: I\to J$. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels. Alors :

$$\sum_{i\in I}u_{\varphi(i)}=\sum_{j\in J}u_j.$$

Remarque

La proposition reste évidemment valable pour un produit.

Démonstration

Dans la somme $\displaystyle\sum_{i\in I}u_{\varphi(i)}$, on pose $j=\varphi(i)$. Par bijectivité de φ, on peut écrire :

$$\sum_{i\in I}u_{\varphi(i)}=\sum_{j\in\varphi(I)}u_j=\sum_{j\in J}u_j.$$

■

Exemples

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j}$, où l'on a posé $k = n+j \Leftrightarrow j = n-k$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la formule de trigonométrie $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ (voir le chapitre 2), on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{2n} \ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right) &= \sum_{j=0}^{n-1} \ln\left(\sin\left(\frac{(2n-j)\pi}{2n}\right)\right), \quad \text{en posant } j = 2n-k \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \ln\left(\sin\left(\pi - \frac{j\pi}{2n}\right)\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \ln\left(\sin\left(\frac{j\pi}{2n}\right)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \ln\left(\sin\left(\frac{j\pi}{2n}\right)\right) \quad \text{car } \sin(0) = 0.
\end{aligned}$$

Proposition 1.51. Télescopage

Soit $(u_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ une famille de réels. Alors :

- $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (u_{i+1} - u_i) = u_n - u_0$;
- si l'on suppose que pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $u_i \neq 0$, $\displaystyle\prod_{i=0}^{n-1} \frac{u_{i+1}}{u_i} = \frac{u_n}{u_0}$.

Démonstration

Les deux preuves se font par récurrence. ■

Exemples

- En remarquant que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} (1-x)x^k = \sum_{k=0}^{n} \left(x^k - x^{k+1}\right) = 1 - x^{n+1}.$$

  On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

- On admet la relation trigonométrique $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sin\left(2^k x\right) \neq 0$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(2^k x\right) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\sin\left(2^{k+1}x\right)}{2\sin(2^k x)} = \frac{1}{2^n} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\sin\left(2^{k+1}x\right)}{\sin(2^k x)} = \frac{\sin(2^n x)}{2^n \sin(x)}.$$

Proposition 1.52. Sommes usuelles

Soients $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On a :

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$;
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n+1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$.

Démonstration

Nous prouvons seulement la seconde formule par récurrence, les deux autres se font de manière analogue.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathscr{P}_n$: « $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».

Initialisation : $\mathscr{P}_1$ est vraie car $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k^2 = \frac{1 \times (1+1) \times (2 \times 1 + 1)}{6}$.

Hérédité : On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain entier naturel n non nul. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}. \end{aligned}$$

On a montré que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie, ce qui termine la récurrence. ■

Proposition 1.53.

Soient a et b deux réels et un n un entier naturel non nul. On a :

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i}.$$

Démonstration

On développe $(a-b)\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i}$. On a :

$$(a-b)\sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i} = \sum_{i=0}^{n-1} a^{i+1} b^{n-1-i} - \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1}.$$

On procède au changement de variable $j = i+1$ dans la première somme, on a donc :

$$\begin{aligned}(a-b)\sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i} &= \sum_{j=1}^{n} a^j b^{n-j} - \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1} \\ &= a^n - b^n + \sum_{j=1}^{n-1} a^j b^{n-j} - \sum_{i=1}^{n-1} a^i b^{n-1} \\ &= a^n - b^n.\end{aligned}$$

■

7.2. Coefficients binomiaux et formule du binôme de Newton

Définition 1.54. Factorielle

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit $n!$, et on lit « factorielle de n », par : $n! = \prod_{i=1}^{n} i$. On remarque que, lorsque $n = 0$, le produit est indéxé sur l'ensemble vide, donc vaut 1.

Remarque

Par définition, on a $(n+1)! = (n+1) \times n!$.

Définition 1.55. Coefficient binomial

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. On définit $\binom{n}{k}$, et on lit « k parmi n », par :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Exemple

On remarque que $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$ et $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Proposition 1.56. Propriétés

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. On a :

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;
- si l'on suppose que $k+1 \leq n$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ (formule du triangle de Pascal) ;
- si l'on suppose $k \geq 1$, $n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}$.

Démonstration

Toutes les formules se montrent en revenant à la définition du coefficient binomial, nous nous contentons de prouver la formule du triangle de Pascal. On a :

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}=\frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k}+\frac{1}{k+1}\right)\\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\times\frac{n+1}{(k+1)(n-k)}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}\\ &= \binom{n+1}{k+1}.\end{aligned}$$

■

Proposition 1.57. Binôme de Newton

Soient a et b deux réels et n un entier naturel. On a : $(a+b)^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$.

Démonstration

On fait une preuve par récurrence. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose

$$\mathscr{P}_n : « \forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\quad (a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} ».$$

Initialisation : $\mathscr{P}_0$ est clairement vraie.
Hérédité : On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain entier naturel n, montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. Soient a et b deux réels. On a :

$$(a+b)^{n+1}=(a+b)\times(a+b)^n.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :

$$(a+b)^{n+1}=(a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}.$$

On fait le changement de variable $j=k+1$ dans la première somme, on a :

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1}&=\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}a^j b^{n+1-j}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}\\ &=a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j-1}a^j b^{n+1-j}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}.\end{aligned}$$

En regroupant les deux sommes et en utilisant la formule du triangle de Pascal, on obtient :

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1}&=a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^k b^{n+1-k}\\ &=a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}\\ &=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}.\end{aligned}$$

On a montré que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie, ce qui termine la récurrence. ■

Exemple

On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}=(1+1)^n=2^n.$

7.3. Sommes doubles

Définition 1.58. Somme double

Soient I et J deux ensembles finis non vides. Soit $\left(u_{i,j}\right)_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels. Soit $K\subset I\times J$. La somme $\displaystyle\sum_{(i,j)\in K}u_{i,j}$ s'appelle une somme double.

Proposition 1.59.

Soient I et J deux ensembles finis non vides. Soit $\left(u_{i,j}\right)_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels. On pose $K=I\times J$. Alors :

$$\sum_{(i,j)\in K}u_{i,j}=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}u_{i,j}=\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}u_{i,j}.$$

Démonstration

On remarque que

$$K=\bigcup_{i_0\in I}\{i_0\}\times J=\bigcup_{j_0\in J}I\times\{j_0\}.$$

On en déduit que

$$\sum_{(i,j)\in K}u_{i,j}=\sum_{(i,j)\in\bigcup\limits_{i_0\in I}\{i_0\}\times J}u_{i,j}=\sum_{i_0\in I}\sum_{(i,j)\in\{i_0\}\times J}u_{i,j}=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}u_{i,j}.$$

On montre de même que

$$\sum_{(i,j)\in K}u_{i,j}=\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}u_{i,j}.$$

■

Exemples

- Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $(u_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de réels. On a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}u_i\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}u_i\right)\times\left(\sum_{j=1}^{n}u_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}u_iu_j.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} i+\sum_{j=1}^{n} j\right) \quad \text{(linéarité du signe somme)}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(n i+\frac{n(n+1)}{2}\right) \quad \text{(on utilise les sommes usuelles)}\\
&= n\sum_{i=1}^{n} i+\frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{n} 1 \quad \text{(linéarité du signe somme)}\\
&= \frac{n^2(n+1)}{2}+\frac{n^2(n+1)}{2} \quad \text{(on utilise les sommes usuelles)}\\
&= n^2(n+1).
\end{aligned}$$

Exemples

On appelle somme triangulaire toute somme double de la forme $\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} u_{i,j}$ ou $\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} u_{i,j}$, etc.

Voici deux exemples de calculs de sommes triangulaires :

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculons $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} i\,j$. On préfère permuter pour avoir une somme plus simple à calculer. On écrit :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} i\,j &= \sum_{1\leq i\leq j\leq n} i\,j\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} i\,j\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(j\sum_{i=1}^{j} i\right) \quad \text{(linéarité du signe somme)}\\
&= \sum_{j=1}^{n} j\times\frac{j(j+1)}{2} \quad \text{(on utilise les sommes usuelles)}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(j^3+j^2\right) \quad \text{(linéarité du signe somme)}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right) \quad \text{(sommes usuelles)}\\
&= \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{6}+\frac{n(n+1)}{4}\right) \quad \text{(on factorise par } n(n+1))\\
&= \frac{n(n+1)}{2}\times\frac{2(2n+1)+3n(n+1)}{12}\\
&= \frac{n(n+1)\left(3n^2+7n+2\right)}{24}\\
&= \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}.
\end{aligned}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculons $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j}$. On semble bloquer avec cette somme. On décide de permuter les indices. On écrit :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j} &= \sum_{1\leq i\leq j\leq n}\frac{i}{j}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} i\right) \quad \text{(linéarité)}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j}\times\frac{j\left(j+1\right)}{2}\right) \quad \text{(on utilise les sommes usuelles)}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(j+1\right) \quad \text{(linéarité de la somme)}\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j+\sum_{j=1}^{n} 1\right) \quad \text{(linéarité de la somme)}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}+n\right) \quad \text{(on utilise les sommes usuelles)}\\
&= \frac{n(n+3)}{4}.
\end{aligned}$$

RETROUVEZ ICI LA SYNTHÈSE DE CE CHAPITRE À TÉLÉCHARGER

www.lienmini.fr/40872-A

MÉTHODES PAS À PAS

Méthode 1. Montrer une inclusion entre deux ensembles.

Soit E l'ensemble des entiers naturels pairs et $F = \{k(k+1),\ k \in \mathbb{N}\}$. Montrons que $F \subset E$.

Conseils méthodologiques

Pour montrer une inclusion entre deux ensembles $F \subset E$, on considère un élément quelconque x de l'ensemble F et on montre que $x \in E$.

Application de la méthode

Soit $n \in F$, alors, il existe un entier naturel k tel que $n = k(k+1)$. Pour montrer que n est pair, on va procéder par disjonction de cas :

- si k est pair, alors n est divisible par k et donc par 2 ;
- si k est impair, $k+1$ est pair et n est divisible par $k+1$ et donc par 2.

Dans tous les cas, n est un nombre pair, donc $n \in E$ et on a bien $F \subset E$.

Méthode 2. Montrer une égalité entre deux ensembles.

Montrer que $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R},\ \forall y > 0,\ x \leq y\}$.

Conseils méthodologiques

Pour montrer une égalité entre deux ensembles, on procède généralement par double inclusions en montrant $E \subset F$ puis $F \subset E$.

Application de la méthode

On va montrer les deux inclusions séparément.

- Commençons par : $\mathbb{R}_- \subset \{x \in \mathbb{R},\ \forall y > 0,\ x \leq y\}$.
  Soit $x \in \mathbb{R}_-$, alors, pour tout $y > 0$, on a bien $x \leq y$. Ainsi : $x \in \{x \in \mathbb{R},\ \forall y > 0,\ x \leq y\}$.
- On va maintenant montrer : $\{x \in \mathbb{R},\ \forall y > 0,\ x \leq y\} \subset \mathbb{R}_-$.
  Soit $x \in \{x \in \mathbb{R},\ \forall y > 0,\ x \leq y\}$, on suppose que $x > 0$, alors, en prenant $y = \frac{x}{2} > 0$, on a : $x < \frac{x}{2} \iff x < 0$ ce qui est incompatible avec notre hypothèse de départ. On en déduit que $x \in \mathbb{R}_-$.

Méthode 3. Calculer une somme en faisant apparaître des somme de référence.

Soit $n \in \mathbb{N}$, Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2}(k-1)(3k+1)$.

Conseils méthodologiques

Pour calculer une somme à partir des sommes de références :

- on développe l'expression dans le signe somme ;
- on utilise la linéarité du signe somme pour faire apparaître plusieurs sommes ;
- on effectue des changements de variables ou on ajoute des termes pour se ramener à la bonne borne inférieure (en n'oubliant pas de les ôter après) ;
- on applique les formules des sommes de références.

Application de la méthode

Soit $n \in \mathbb{N}$:

- On développe l'expression dans le signe somme : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2}(k-1)(3k+1)=\sum_{k=2}^{n+2}\left(3k^2-2k-1\right)$.
- On utilise la linéarité du signe somme :

$$\sum_{k=2}^{n+2}(k-1)(3k+1)=3\sum_{k=2}^{n+2}k^2-2\sum_{k=2}^{n+2}k-\sum_{k=2}^{n+2}1.$$

- On se ramène à la bonne borne inférieure dans les deux premières sommes :

$$\sum_{k=2}^{n+2}(k-1)(3k+1)=3\left(\sum_{k=1}^{n+2}k^2-1^2\right)-2\left(\sum_{k=1}^{n+2}k-1\right)-\sum_{k=2}^{n+2}1.$$

- On applique les formules des sommes de références et on simplifie :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n+2}(k-1)(3k+1)&=3\frac{(n+2)(n+3)(2(n+2)+1)}{6}-2\frac{(n+2)(n+3)}{2}-(n+2-2+1)\\&=\frac{(n+2)(n+3)(2n+3)}{2}-(n+1).\end{aligned}$$

EXERCICES

Vrai ou Faux

		Vrai	Faux
a)	Si $C \subset A \cup B$ alors $C \subset A$ ou $C \subset B$.	□	□
b)	Soient A, B, C trois ensembles quelconques, alors : $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.	□	□
c)	L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n+1. \end{array}$ est surjective.	□	□
d)	L'application $\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x. \end{array}$ est injective.	□	□
e)	Soit $f : x \mapsto x^2 - 1$, alors $f([-1,3]) = [-1,8]$.	□	□
f)	La relation d'orthogonalité entre deux droites du plan est une relation d'équivalence.	□	□
g)	Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall \varepsilon > 0, \lvert a \rvert \leq \varepsilon$, alors $a = 0$.	□	□
h)	Soient $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites de réelles quelconques. On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$.	□	□
i)	Il existe une application $f : E \to E$ bijective telle que $f^{-1} = f$.	□	□

Exercices d'application du chapitre 1

●○○ 5 min.

EXERCICE 1

On pourra utiliser le fait que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

1. Montrer que si a et b sont deux entiers relatifs tels que $a + b\sqrt{2} = 0$ alors $a = b = 0$.
2. En déduire que si m, n, p et q sont des entiers relatifs, alors :

$$m + n\sqrt{2} = p + q\sqrt{2} \iff (m = p \text{ et } n = q).$$

●●○ 10 min.

EXERCICE 2

Montrer que si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

●○○ 5 min.

EXERCICE 3

Résoudre $x - 1 \leq \sqrt{x+2}$.

●●● 20 min.

EXERCICE 4

Des raisonnements par récurrence.

1. Démontrer que tout entier $n \geq 1$ peut s'écrire comme somme de puissances de 2 toutes distinctes.
2. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 3$, on peut trouver n entiers strictement positifs $x_1, \ldots, x_n$, deux à deux distincts, tels que :

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = 1.$$

3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (suite de Fibonacci) définie par $u_0 = u_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq n$.

●○○ 5 min.

EXERCICE 5

Soit E un ensemble. Montrer que pour toutes parties A et B de E, on a :

1. $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$;
2. $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$;
3. $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$.

●●○ 5 min.

EXERCICE 6

Soient A et B des parties d'un ensemble E. Montrer que :

$$B \subset A \iff \forall X \in \mathscr{P}(E),\ (A\cap X)\cup B = A\cap(X\cup B).$$

●○○ 10 min.

EXERCICE 7

Soit E un ensemble. On considère la relation $\mathscr{R}$ définie sur $\mathscr{P}(E)$ par : $A\mathscr{R}B \iff A = B$ ou $A = \overline{B}$.
Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

●○○ 5 min.

EXERCICE 8

On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation $\mathscr{R}$ définie par : $x\mathscr{R}y$ si et seulement si $x+y$ est pair.
Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence. Quelles sont les classes d'équivalence de cette relation ?

●●○ 10 min.

EXERCICE 9

On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\angle$ par :

$$(x,y)\angle(x',y') \iff \left[x \leq x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y')\right].$$

Montrer que $\angle$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.

●○○ 25 min.

EXERCICE 10

Calculer les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-2)$;
2. $\displaystyle\sum_{k=23}^{78}4$;
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)$;
4. $\displaystyle\sum_{k=7}^{21}\frac{2k+3}{5}$;
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{k+1}$;
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^{3k+2}$;
7. $\displaystyle\sum_{k=6}^{25}\frac{1}{2^k}$;
8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^{2k+1}}$;
9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(6k^2-4k+2\right)$.

●○○ 15 min.

EXERCICE 11

1. Trouver deux réels a, b et c tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$k^2 = a(k+1)^3 + b(k+1)^2 + c(k+1) - \left(ak^3 + bk^2 + ck\right).$$

2. En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2$ en faisant apparaître une somme télescopique.

Exercices d'approfondissement du chapitre 1

●●● 10 min.

EXERCICE A

Soient f et g deux bijections de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$. Montrer que l'application $h : k \mapsto f(k)g(k)$ n'est pas une bijection de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$.

●○○ 5 min.

EXERCICE B

Soit $\mathscr{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$. Démontrer que $\mathscr{D}$ ne peut pas s'écrire comme le produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

●●● 10 min.

EXERCICE C

Soit f une application d'un ensemble E dans lui-même. Montrer que f est bijective si, et seulement si pour toute partie A de E, on a : $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

●●○ 10 min.

EXERCICE D

Soit f une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

1. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leq n$, montrer que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.
2. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \geq n$, montrer que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

●●○ 10 min.

EXERCICE E

Soit E un ensemble et $f : E \to E$. Montrer que f est injective si, et seulement si, pour toutes parties A et B de E, on a : $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

●●● 15 min.

EXERCICE F

1. Soit E un ensemble. Soit $f : E \to \mathscr{P}(E)$ une application. Montrer que f n'est pas surjective (*On pourra utiliser l'ensemble* $A = \{x \in E,\ x \notin f(x)\}$).
2. En déduire que « l'ensemble de tous les ensembles » n'existe pas.

●●● 30 min.

EXERCICE G

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $(x_1, \ldots, x_{2^n}) \in (\mathbb{R}_+)^{2^n}$, on a :

$$\left(\prod_{k=1}^{2^n} x_k\right)^{1/2^n} \leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} x_k.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Justifier qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^k \leq n < 2^{k+1}$ (*On pourra utiliser la fonction* $\log_2$ *définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par :* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \log_2(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$.)
   (b) Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$. On pose $m = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$.
   En considérant $(x_1, \ldots, x_n, m, \ldots, m) \in (\mathbb{R}_+)^{2^{k+1}}$, montrer l'inégalité suivante (inégalité arithmético-géométrique) :

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Problème

●●○ 90 min.

Problème I

Un ensemble E est dit dénombrable si et seulement si il existe une bijection entre l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et E. Cette bijection permet alors « d'énumérer » les éléments de E.

Partie A - Dénombrabilité d'ensembles simples

Dans cette partie, on se propose d'établir la dénombrabilité de quelques ensembles.

1. Montrer que $\mathbb{N}^*$ est dénombrable.
2. Montrer que l'ensemble des entiers naturels pairs $\mathscr{P} = \{2k,\ k \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable.
3. On introduit l'application :

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ & n & \mapsto & \begin{cases} n/2 & \text{, si } n \text{ est pair} \\ -(n+1)/2 & \text{, si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{array}$$

   (a) Montrer que l'application φ est bien définie.
   (b) Établir que φ est bijective.
4. Dans cette question, on va montrer que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable. Pour cela on introduit l'application :
$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N}^* \\ & (p,q) & \mapsto & 2^p(2q+1) \end{array}$$
   (a) Montrer que ψ est bien définie et injective.
   (b) Établir que ψ est surjective.
   (c) En déduire que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

Partie B - Le théorème de Cantor-Bernstein

Le but de cette partie est de démontrer le théorème de Cantor-Bernstein :
Soient E et F deux ensembles tels qu'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E, alors il existe une bijection de E sur F.

Dans la suite de, on considère deux ensembles E et F et deux applications injectives $i : E \to F$ et $j : F \to E$. On introduit les notations suivantes :

$$A_0 = E \setminus j(F),\ \forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} = j \circ i(A_n).$$

De plus, on pose :

$$B = \bigcup_{i \geq 0} A_i,\ C = E \setminus B.$$

1. Dans cette question, on va construire l'application.
   (a) Montrer que pour tout $x \in C$, il existe un unique $z \in F$ tel que $x = j(z)$.
   On notera cet élément $\phi(x)$.
   (b) Pour $x \in B$, on note $\phi(x) = i(x)$. Démontrer que l'on a défini une application $\phi : E \to F$.
2. On va montrer l'injectivité de ϕ.
   (a) Montrer que $\phi_{|B}$ et $\phi_{|C}$ sont injectives.
   (b) Soient $x \in C$ et $y \in B$ tels que $\phi(x) = \phi(y)$. Montrer que $x = (j \circ i)(y)$.
   (c) En déduire que ϕ est injective.
3. Montrer que ϕ est surjective. Conclure.

Partie C - Dénombrabilité de $\mathbb{Q}$

Dans cette partie, on va démontré la dénombrabilité de $\mathbb{Q}$.

1. Donner une application injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$.

EXERCICES

2. On appelle représentant irréductible d'un nombre rationnel r l'unique fraction irréductible $\dfrac{p}{q}$ égale à r avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
On considère l'application $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{N}^2 \\ r & \longmapsto & (p,q) \end{array}$.
   (a) Montrer que ϕ est injective.
   (b) ϕ est-elle surjective ?
   (c) Trouver une application injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$.
3. En déduire que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

+ D'EXERCICES OFFERTS EN LIGNE

www.lienmini.fr/40872-EXOS

► **Retrouvez des exercices supplémentaires pour perfectionner votre entraînement.**

CORRIGÉS

Corrigés des Vrai/Faux

a) Faux. On peut prendre $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}_-^*$ et $C = \{-1, 1\}$.
b) Vrai. On peut le montrer par double inclusion.
c) Faux. 2 n'admet pas d'antécédent dans $\mathbb{N}$ par f.
d) Vrai. C'est une conséquence de la bijectivité de $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$.
e) Vrai. On peut le voir sur la représentation graphique de la fonction.
f) Faux. Elle n'est pas réflexive et n'est pas transitive.
g) Vrai. On le montre en utilisant un raisonnement par l'absurde.
h) Faux. En particulier : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \neq \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)$
i) Vrai. On peut prendre $f = \mathrm{id}_E$ par exemple.

Corrigés des exercices d'application

EXERCICE 1

1. On va raisonner par l'absurde. On suppose que $a + b\sqrt{2} = 0$ et $(a, b) \neq (0, 0)$.
On suppose que $b = 0$ alors $a = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. On peut donc supposer pour la suite que $b \neq 0$. On peut diviser l'égalité par b, ce qui donne : $\sqrt{2} = -\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ce qui est faux car $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. On en déduit que l'hypothèse de départ est fausse et $a = b = 0$.
2. Soit m, n, p et q des entiers relatifs, alors :

$$m + n\sqrt{2} = p + q\sqrt{2} \Longleftrightarrow (m - p) + (n - q)\sqrt{2} = 0.$$

On peut alors appliquer le résultat de la question précédente pour obtenir : $m = p$ et $n = q$.

EXERCICE 2

On va montrer la contraposée de cette proposition : si n est un entier impair, alors $n^2 - 1$ est divisible par 8. Remarquons que si n est impair alors il peut s'écrire sous la forme : $n = 4k + 1$ ou $n = 4k + 3$ où k est un entier naturel. On va donc procéder par disjonction de cas :
- On suppose que $n = 4k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$. On a : $n^2 - 1 = 16k^2 + 8k = 8(2k^2 + k)$, avec $2k^2 + k \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, $n^2 - 1$ est bien divisible par 8.
- On suppose que $n = 4k + 3$ avec $k \in \mathbb{N}$. On a : $n^2 - 1 = 16k^2 + 24k + 8 = 8(2k^2 + 3k + 1)$, avec $2k^2 + 3k + 1 \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, $n^2 - 1$ est bien divisible par 8.

On a bien montré que si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

EXERCICE 3

Pour commencer, notons que cette inéquation a du sens uniquement si $x \geq -2$. De plus, si $x - 1 \leq 0$, cette inéquation est forcément vraie. Dorénavant, on suppose que $x > 1$, par stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, on peut écrire :

$$x - 1 \leq \sqrt{x + 2} \Longleftrightarrow (x - 1)^2 \leq x + 2 \Longleftrightarrow x^2 - 3x - 1 \leq 0.$$

On étudie le signe de ce polynôme du second degré en en cherchant les racines, il en a deux réelles qui sont : $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$. On en déduit que $x^2 - 3x - 1 \leq 0 \Longleftrightarrow x \in [x_1, x_2]$. Seule x_2 est dans l'intervalle $]1, +\infty[$, finalement : $x - 1 \leq \sqrt{x+2} \Longleftrightarrow x \in [-2, x_2]$.

EXERCICE 4

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathscr{P}_n$: « n peut s'écrire comme somme de puissances de 2 toutes distinctes ».
Initialisation : $\mathscr{P}_1$ est vraie car $1 = 2^0$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathscr{P}_k$ est vraie pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ l'est encore. Pour cette hérédité, on va procéder par disjonction de cas :
• si n est pair, alors il existe $m \in [\![1, n]\!]$ tel que : $n = 2m$. D'après l'hypothèse de récurrence, m s'écrit comme somme de puissances de 2 toutes distinctes :
$$\exists (p_1, \ldots, p_r) \in \mathbb{N}^r,\ m = 2^{p_1} + \cdots + 2^{p_r}.$$
Alors : $n = 2^{p_1+1} + \cdots + 2^{p_r+1}$ et n s'écrit comme somme de puissances de 2 toutes distinctes ;
• si n est impair, alors il existe $m \in [\![1, n]\!]$ tel que : $n-1 = 2m$. D'après l'hypothèse de récurrence, m s'écrit comme somme de puissances de 2 toutes distinctes :
$$\exists (p_1, \ldots, p_r) \in \mathbb{N}^r,\ m = 2^{p_1} + \cdots + 2^{p_r}.$$
Alors : $n = 1 + 2^{p_1+1} + \cdots + 2^{p_r+1} = 2^0 + 2^{p_1+1} + \cdots + 2^{p_r+1}$ et n s'écrit comme somme de puissances de 2 toutes distinctes.
Finalement, $\mathscr{P}_{n+1}$ est bien vraie.
D'après le principe de récurrence forte, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, la propriété $\mathscr{P}_n$: « on peut trouver n entiers strictement positifs $x_1, \ldots, x_n$, deux à deux distincts, tels que : $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n} = 1.$ ».
Initialisation : $\mathscr{P}_3$ est vraie en prenant $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ et $x_3 = 6$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie, montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ l'est encore. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe n entiers strictement positifs $x_1, \ldots, x_n$, deux à deux distincts, tels que : $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n} = 1$. On peut supposer, sans perte de généralité que $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Forcément $x_1 \geq 2$ car $\dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n} > 0$. On a alors :
$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2x_1} + \frac{1}{2x_2} + \cdots + \frac{1}{2x_n} \end{aligned}$$
En posant $X_1 = 2$ et pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, $X_k = 2x_{k-1}$. On a alors : $X_1 < 4 \leq X_2 < \cdots < X_{n+1}$.
Les entiers X_k sont donc distincts et $\dfrac{1}{X_1} + \dfrac{1}{X_2} + \cdots + \dfrac{1}{X_n} = 1$. $\mathscr{P}_{n+1}$ est bien vraie.
D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.
3. Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathscr{P}_n$: « $u_n \geq n$ ».
Initialisation : Pour $n = 1$ et $n = 2$, la propriété est évidente.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ sont vraies, montrons que $\mathscr{P}_{n+2}$ l'est encore. On a : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et $u_{n+1} \geq n+1$, $u_n \geq n$. Ainsi :
$$u_{n+2} \geq n + 1 + n \geq n + 1 + 1 = n + 2.$$
$\mathscr{P}_{n+2}$ est bien vraie.
D'après le principe de récurrence double, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 5

1. Si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ et $x \in B$, soit $\mathbb{1}_A(x) = 1$ et $\mathbb{1}_B(x) = 1$. Dans ce cas, on a bien, pour tout $x \in A \cap B$: $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x)$.
Si maintenant $x \notin A \cap B$, alors ou bien $x \notin A$ et $\mathbb{1}_A(x) = 0$, ou bien $x \notin B$ et $\mathbb{1}_B(x) = 0$. Dans tous les cas, $\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 0$. Finalement, pour tout $x \in \overline{A \cap B}$: $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x)$.
2. Soit $x \in \overline{A}$, alors $x \notin A$ et $\mathbb{1}_A(x) = 0$. On a bien, pour tout $x \in \overline{A}$: $\mathbb{1}_{\overline{A}}(x) = 1 - \mathbb{1}_A(x)$. De la même façon, si $x \notin \overline{A}$, alors $x \in A$ et $\mathbb{1}_A(x) = 1$. On a encore, pour tout $x \in A$: $\mathbb{1}_{\overline{A}}(x) = 1 - \mathbb{1}_A(x)$.
3. Soit $x \notin A \cup B$, alors x n'appartient ni à A, ni à B, ainsi : $\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x) = \mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 0$ et on a bien, pour tout $x \in \overline{A \cup B}$: $\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_{A\cap B}(x)$.
Soit $x \in A \cup B$, alors trois cas sont à considérer :

- si $x \in A$, mais $x \notin B$, alors $x \notin A \cap B$ et l'égalité est bien vérifiée ;
- si $x \notin A$, mais $x \in B$, alors $x \notin A \cap B$ et l'égalité est bien vérifiée ;
- si $x \in A$, mais $x \in B$, alors $x \in A \cap B$ et l'égalité est bien vérifiée.

Finalement, pour tout $x \in A \cup B$: $\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_{A\cap B}(x)$.

EXERCICE 6

($\Rightarrow$) On suppose que $B \subset A$. Soit $X \in \mathscr{P}(E)$, alors : $A \cap X \subset A$ et $B \subset A$, donc $(A \cap X) \cup B \subset A$. Notons également que : $A \cap X \subset X$, ainsi $(A \cap X) \cup B \subset X \cup B$. Finalement, on a montré que : $(A \cap X) \cup B \subset A \cap (X \cup B)$.
D'autre part, si $x \in A \cap (X \cup B)$, deux cas sont à considérer : soit $x \in B$, soit $x \in X$ et alors $x \in A \cap X$. Finalement, $x \in (A \cap X) \cup B$. On a donc montré que : $A \cap (X \cup B) \subset (A \cap X) \cup B$.
Pour conclure, on a montré que : $\forall X \in \mathscr{P}(E)$, $(A \cap X) \cup B = A \cap (X \cup B)$.
($\Leftarrow$) On suppose que pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, $(A \cap X) \cup B = A \cap (X \cup B)$. En particulier, en prenant $X = \varnothing$, on a : $B = A \cap B$, donc $B \subset A$.

EXERCICE 7

On va vérifier chaque point un par un :

- $\mathscr{R}$ est réflexive, il est clair que, pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, $A \mathscr{R} A$.
- Soit $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$. On a : $A \mathscr{R} B \Longrightarrow \big(A = B \text{ ou } A = \overline{B}\big) \Longrightarrow \big(B = A \text{ ou } B = \overline{A}\big) \Longrightarrow B \mathscr{R} A$.

$\mathscr{R}$ est symétrique.

- Soit $(A, B, C) \in \mathscr{P}(E)^3$ tel que $A \mathscr{R} B$ et $B \mathscr{R} C$. Alors $A = B$ ou $A = \overline{B}$ et $B = C$ ou $B = \overline{C}$. Comme pour tout $D \in \mathscr{P}(E)$: $\overline{\overline{D}} = D$, on a forcément $A = C$ ou $A = \overline{C}$, donc $A \mathscr{R} C$. La relation $\mathscr{R}$ est transitive.

Finalement, $\mathscr{R}$ est bien une relation d'équivalence.

EXERCICE 8

On va vérifier chaque point un par un :

- $\mathscr{R}$ est réflexive, il est clair que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $x + x = 2x$ est pair, donc $x \mathscr{R} x$.
- Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. On a : $x \mathscr{R} y \Longrightarrow \big(x + y \text{ est pair}\big) \Longrightarrow \big(y + x \text{ est pair}\big) \Longrightarrow y \mathscr{R} x$.

$\mathscr{R}$ est symétrique.

- Soit $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ tel que $x \mathscr{R} y$ et $x \mathscr{R} y$. Alors $x + y$ est pair et $y + z$ est pair. Ainsi, il existe $(k, \ell) \in \mathbb{Z}$ tel que : $x + y = 2k$ et $z + y = 2\ell$. Ainsi : $x + z = 2k + 2\ell - 2y$, on en déduit que $x + z$ est pair et donc $x \mathscr{R} z$. La relation $\mathscr{R}$ est transitive.

Finalement, $\mathscr{R}$ est bien une relation d'équivalence.

On remarque que tous les éléments qui sont en relation avec 0 sont les entiers pairs, tandis que tous les entiers en relation avec 1 sont les entiers impairs. Or, l'ensemble des entiers pairs et des entiers impairs forme une partition de $\mathbb{Z}$, on en déduit qu'il y a deux classes d'équivalence de cette relation qui sont : l'ensemble des nombres pairs et l'ensemble des nombres impairs.

EXERCICE 9

On va vérifier chaque point un par un :

- $\angle$ est réflexive, car $x = x$ et $y \leq y$, donc $(x, y) \angle (x, y)$.
- Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x, y) \angle (x', y')$ et $(x', y') \angle (x, y)$. Alors $x = x'$ (on ne peut pas avoir $x < x'$ et $x > x'$), $y \leq y'$ et $y' \leq y$. Par conséquent, $x = x'$ et $y = y'$. $\angle$ est antisymétrique.
- Soient $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x_1, y_1) \angle (x_2, y_2)$ et $(x_2, y_2) \angle (x_3, y_3)$. Alors quatre cas sont possibles :

– soit $x_1 = x_2$ et $x_2 = x_3$, ainsi $x_1 = x_3$. De plus, $y_1 \leq y_2$ et $y_2 \leq y_3$, ainsi : $y_1 \leq y_3$. Par conséquent, $(x_1, y_1) \angle (x_3, y_3)$.
– soit $x_1 = x_2$ et $x_2 < x_3$, dans ce cas $x_1 < x_3$ et $(x_1, y_1) \angle (x_3, y_3)$.
– soit $x_1 < x_2$ et $x_2 = x_3$, dans ce cas $x_1 < x_3$ et $(x_1, y_1) \angle (x_3, y_3)$.
– soit $x_1 < x_2$ et $x_2 < x_3$, dans ce cas $x_1 < x_3$ et $(x_1, y_1) \angle (x_3, y_3)$.

La relation $\angle$ est transitive.

Finalement, $\angle$ est bien une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque

La relation $\angle$ s'appelle l'ordre lexicographique et peut-être défini sur tout produit cartésien de deux ensembles E_1 et E_2 ordonnés.

EXERCICE 10

1. On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-2) = -2 \times (n+1)$ (attention, il y a $n+1$ termes dans la somme).

2. On a : $\displaystyle\sum_{k=23}^{78} 4 = 4 \times (78 - 23 + 1) = 224$.

3. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) &= 2\sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} 1 \quad \text{(par linéarité)} \\
&= 2 \times \frac{(n-1)n}{2} + n \quad \text{(sommes usuelles)} \\
&= (n-1)n + n \\
&= n^2.
\end{aligned}$$

4. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=7}^{21} \frac{2k+3}{5} &= \frac{1}{5}\sum_{k=7}^{21} k + \frac{3}{5}\sum_{k=7}^{21} 1 \quad \text{linéarité} \\
&= \frac{1}{5}\left(\sum_{k=1}^{21} k - \sum_{k=1}^{6} k\right) + \frac{3}{5}\sum_{k=7}^{21} 1 \quad \text{(on se ramène à des sommes usuelles)} \\
&= \frac{1}{5}\left(\frac{21 \times 22}{2} - \frac{6 \times 7}{2}\right) + \frac{3}{5} \times (21 - 7 + 1) \quad \text{(sommes usuelles)} \\
&= 51.
\end{aligned}$$

5. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{k+1} &= \mathrm{e}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{k} \\
&= \mathrm{e} \times \frac{1 - \mathrm{e}^{n+1}}{1 - \mathrm{e}}.
\end{aligned}$$

6. C'est encore la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} 2^{3k+2} &= 2^2\sum_{k=0}^{n}\left(2^3\right)^k \\ &= 4\times\frac{1-\left(2^3\right)^{n+1}}{1-2^3} \\ &= \frac{4}{7}\left(2^{3n+3}-1\right).\end{aligned}$$

7. C'est encore la somme des termes d'une suite géométrique. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=6}^{25}\frac{1}{2^k} &= \sum_{k=0}^{25}\left(\frac{1}{2}\right)^k-\sum_{k=0}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{1-(1/2)^{26}}{1-1/2}-\frac{1-(1/2)^6}{1-1/2} \\ &= \frac{1}{32}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right).\end{aligned}$$

8. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^{2k+1}} &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3^2}\right)^k \\ &= \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3^2}\right)^k-\underbrace{1}_{\text{terme d'indice }0}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1-(1/9)^{n+1}}{1-1/9}-1\right) \\ &= \frac{8}{3}\left(1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right).\end{aligned}$$

9. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(6k^2-4k+2\right) &= 6\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+2\sum_{k=1}^{n}1 \quad \text{(par linéarité)} \\ &= 6\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\times\frac{n(n+1)}{2}+2\times n \quad \text{(sommes usuelles)} \\ &= n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)+2n \\ &= n((n+1)(2n+1)-2(n+1)+2) \quad \text{(factorisation par } n\text{)} \\ &= n\left(2n^2+n+1\right).\end{aligned}$$

EXERCICE 11

1. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a :

$$a(k+1)^3+b(k+1)^2+c(k+1)-\left(ak^3+bk^2+ck\right)=3ak^2+(3a+2b)k+(a+b+c).$$

CORRIGÉS

Ainsi, pour que $k^2 = a(k+1)^3 + b(k+1)^2 + c(k+1) - \left(ak^3 + bk^2 + ck\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, il suffit que $\begin{cases} 3a & = 1 \\ 3a + 2b & = 0 \\ a + b + c & = 0 \end{cases}$, soit $a = \dfrac{1}{3}$, $b = -\dfrac{1}{2}$ et $c = \dfrac{1}{6}$.

2. On pose $P(k) = \dfrac{1}{3}k^3 - \dfrac{1}{2}k^2 + \dfrac{1}{6}k$ de sorte que $k^2 = P(k+1) - P(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} (P(k+1) - P(k)) \\ &= P(n+1) - P(1) \quad \text{(somme télescopique)} \\ &= \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}(n+1) - 0 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Corrigés des exercices d'approfondissement

EXERCICE A

On raisonne par l'absurde, on suppose que l'application $h : k \mapsto f(k)g(k)$ réalise une bijection de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$. Par surjectivité de h, il existe $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{Z}$ tels que $h(n) = 1$ et $h(m) = -1$. On en déduit que :

$$f(n)g(n) = 1 \text{ et } f(m)g(m) = -1.$$

Les applications f et g sont à valeurs entières, ainsi :
$f(n) = g(n) \in \{\pm 1\}$ et $f(m) = -g(m) \in \{\pm 1\}$.
f est une application injective, on en déduit que $f(n) = -f(m)$, par conséquent $g(n) = g(m)$ ce qui contredit l'injectivité de g.
En conclusion, h n'est pas une bijection de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$.

EXERCICE B

On suppose qu'il existe deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$, notés A et B, tels que $\mathscr{D} = A \times B$. Comme $(1,0) \in \mathscr{D}$, on en déduit que $1 \in A$, de même $1 \in B$ car $(0,1) \in \mathscr{D}$. Par conséquent, $(1,1) \in A \times B = \mathscr{D}$ ce qui est faux. Donc $\mathscr{D}$ ne peut pas s'écrire comme le produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

EXERCICE C

($\Rightarrow$) On suppose que f est bijective. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$, on va montrer par double inclusion que $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.
Soient $x \in \overline{A}$. On ne peut pas avoir $f(x) \in f(A)$, car sinon par il existerait $u \in A$ tel que $f(x) = f(u)$, puis par injectivité, $x = u \in A$, ce qui est exclu, donc $f(x) \in \overline{f(A)}$.
De la même façon, si $y \in \overline{f(A)}$ alors $f^{-1}(y) \in \overline{A}$, donc $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.

($\Leftarrow$) On suppose que pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$: $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$. Commençons par vérifier que f est injective. Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $x \neq y$. On prend $A = \{x\}$ de sorte que $y \in \overline{A}$. Ainsi :

$$f(y) \in f(\overline{A}) = \overline{f(A)} = \overline{\{f(x)\}}.$$

Autrement dit, $f(x) \neq f(y)$, ce qui prouve l'injectivité de f.
D'autre part, $\overline{f(E)} = f(\overline{E}) = f(\varnothing) = \varnothing$, soit $f(E) = E$ ce qui prouve la surjectivité de f.
En conclusion, f est bijective.

EXERCICE D

1. Montrons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}_n$: « $f(n) = n$ ».
Initialisation : $\mathscr{P}_0$ est vraie car $f(0) \leq 0$ et $f(0) \in \mathbb{N}$, d'où $f(0) = 0$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathscr{P}_k$ est vraie, montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ l'est encore. Par hypothèse, $f(n+1) \leq n+1$ mais $f(n+1)$ ne peut pas être égal à $0, 1, \ldots, n$ (ces valeurs sont déjà « prises », cela contredirait l'injectivité de f). La seule valeur disponible est $n+1$, on a donc $f(n+1) = n+1$. $\mathscr{P}_{n+1}$ est bien vraie.
D'après le principe de récurrence forte, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}_n$: « $f(n) = n$ ».
Initialisation : Soit $x_0 \in \mathbb{N}$ l'antécédent de 0 par f, alors : $0 = f(x_0) \geq x_0$, ce qui impose que $x_0 = 0$. Donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathscr{P}_k$ est vraie, montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ l'est encore. Soit k_{n+1} l'antécédent de $n+1$ par f (il existe car f est bijective), par hypothèse, $k_{n+1} \in [\![0, n+1]\!]$. Or $f(k_{n+1}) \notin \{f(0), f(1), \ldots, f(n)\}$, on en déduit que $k_{n+1} \notin [\![0, n]\!]$, soit $k_{n+1} = n+1$. $\mathscr{P}_{n+1}$ est bien vraie.
D'après le principe de récurrence forte, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE E

($\Rightarrow$) On suppose que f est injective. Soit $(A, B) \in \mathscr{P}(E)$. Procédons par double inclusion pour montrer $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

- Soit $y \in f(A \cap B)$, alors il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. Par conséquent, $x \in A$ donc $y \in f(A)$ et $x \in B$ donc $y \in f(B)$. On en déduit que $y \in f(A) \cap f(B)$.
- Soit $y \in f(A) \cap f(B)$, donc il existe $x_1 \in A$ tel que $y = f(x_1)$ et il existe $x_2 \in B$ tel que $y = f(x_2)$. Par injectivité de f, on a forcément $x_1 = x_2$, on notera cet antécédent x. On en déduit que $x \in A \cap B$, donc $y \in f(A \cap B)$.

($\Leftarrow$) On suppose que pour toutes parties A et B de E, on a : $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2) = y$. On prend alors $A = \{x_1\}$ et $B = \{x_2\}$. on a donc $f(A) = f(B) = \{y\}$ et par conséquent : $f(A \cap B) = \{y\}$. Cette égalité assure que l'image de $A \cap B$ par f est non vide et donc : $A \cap B \neq \varnothing$. Finalement, comme A et B ne contienne qu'un seul élément, cela signifie que : $x_1 = x_2$. Ce qui prouve que f est injective.

EXERCICE F

1. Si A admet un antécédent par f, disons x_0, alors on a $x_0 \in A \Longleftrightarrow x_0 \notin A$. On en déduit que A n'admet pas d'antécédent par f, donc f n'est pas surjective.
2. Si un tel ensemble E existait, alors on aurait $E = \mathscr{P}(E)$, ce qui impossible d'après la question 1 car il n'existe pas de surjection entre E et $\mathscr{P}(E)$.

EXERCICE G

1. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$. On remarque que $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 = x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$. Il s'ensuit que

$$\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}\left(x + y\right). \tag{1.1}$$

CORRIGÉS

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, la proposition

$$\mathscr{P}_n : « \forall (x_1, \dots, x_{2^n}) \in (\mathbb{R}_+)^{2^n}, \left(\prod_{k=1}^{2^n} x_k \right)^{1/2^n} \leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} x_k ».$$

Initialisation : La proposition $\mathscr{P}_0$ est vraie et la proposition $\mathscr{P}_1$ d'après la ligne (1.1).
Hérédité : Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie pour un entier naturel n, montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
Soit $(x_1, \dots, x_{2^{n+1}}) \in (\mathbb{R}_+)^{2^{n+1}}$. On remarque que

$$\left(\prod_{k=1}^{2^{n+1}} x_k \right)^{1/2^{n+1}} = \left(\left(\prod_{k=1}^{2^n} x_k \right)^{1/2^n} \left(\prod_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} x_k \right)^{1/2^n} \right)^{1/2}.$$

En utilisant la ligne (1.1), on a

$$\left(\prod_{k=1}^{2^{n+1}} x_k \right)^{1/2^{n+1}} \leq \frac{1}{2} \left(\left(\prod_{k=1}^{2^n} x_k \right)^{1/2^n} + \left(\prod_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} x_k \right)^{1/2^n} \right).$$

En utilisant deux fois l'hypothèse de récurrence, il vient que :

$$\begin{aligned} \left(\prod_{k=1}^{2^{n+1}} x_k \right)^{1/2^{n+1}} &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} x_k + \frac{1}{2^n} \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} x_k \right) \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{2^{n+1}} x_k. \end{aligned}$$

La proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie, ce qui termine la récurrence.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Par stricte croissance de $\log_2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$2^k \leq n < 2^{k+1} \iff k \leq \log_2(n) < k+1 \iff k = \lfloor \log_2(n) \rfloor.$$

On note que $k \geq 0$.
L'entier naturel $k = \lfloor \log_2(n) \rfloor$ convient et c'est le seul.
(b) Si $x_1 = \cdots = x_n = 0$, l'inégalité est claire. On suppose que maintenant que $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$, en particulier, $m > 0$.
Remarquons que l'uplet $(x_1, \dots, x_n, m, \dots, m)$ contient $2^{k+1} - n$ fois le nombre m.
D'après la question 1, on a :

$$\left(x_1 \times \cdots \times x_n \times m^{2^{k+1}-n} \right)^{1/2^{k+1}} \leq \frac{1}{2^{k+1}} \left(x_1 + \cdots + x_n + \left(2^{k+1} - n \right) m \right).$$

Comme $x_1 + \cdots + x_n = nm$, il s'ensuit que

$$(x_1 \times \cdots \times x_n)^{1/2^{k+1}} m^{\left(2^{k+1}-n\right)/2^{k+1}} \leq \frac{2^{k+1} m}{2^{k+1}} = m.$$

Après simplification par $m^{\left(2^{k+1}-n\right)/2^{k+1}} > 0$ et en élevant à la puissance $\dfrac{2^{k+1}}{n}$ (le sens de l'inégalité ne changera pas car la fonction $x \mapsto x^{2^{k+1}/n}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$) il s'ensuit que

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Corrigé du problème

PROBLÈME I

Partie A - Dénombrabilité d'ensembles simples

1. On considère les applications $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n-1 \end{array}$ et $g_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array}$, de sorte que : $f_1 \circ g_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ et $g_1 \circ f_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{N}^*}$. Ces relations prouvent que f_1 est bijective.
$\mathbb{N}^*$ est donc dénombrable.

2. On considère l'application $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathscr{P} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ p & \longmapsto & \dfrac{p}{2} \end{array}$, cette application est bien définie car les éléments de $\mathscr{P}$ sont des entiers pairs, donc : $\forall p \in \mathscr{P},\ \dfrac{p}{2} \in \mathbb{N}$.
On introduit l'application $g_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ n & \longmapsto & 2n \end{array}$, de sorte que : $f_2 \circ g_2 = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ et $g_2 \circ f_2 = \mathrm{id}_{\mathscr{P}}$. Ces relations prouvent que f_2 est bijective et que $\mathscr{P}$ est dénombrable.

3. (a) Lorsque n est pair, $n/2$ est bien un entier naturel, de même, si n est impair, alors $n+1$ est pair et $-(n+1)/2$ est un entier négatif. L'ensemble des nombres pairs et l'ensemble des nombres impairs forment une partition de $\mathbb{N}$, on vient donc de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, n admet une image par φ et $\varphi(n) \in \mathbb{Z}$. Finalement, φ est bien définie.

(b) On pose $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ k & \longmapsto & \begin{cases} 2k & \text{, si } k \in \mathbb{N} \\ -(2k+1) & \text{, si } k < 0 \end{cases} \end{array}$.

On peut vérifier que $\varphi \circ h = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ et $h \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, ce qui prouve que φ est bijective. $\mathbb{Z}$ est donc dénombrable.

4. (a) Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, alors $2^p \in \mathbb{N}^*$ et $2q+1 \in \mathbb{N}^*$ donc $\psi(p,q) \in \mathbb{N}^*$, l'application est bien définie. Montrons que cette application est injective. Soient $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ et $(p',q') \in \mathbb{N}^2$ tels que : $\psi(p,q) = \psi(p',q')$. On a donc :

$$2^p(2q+1) = 2^{p'}(2q'+1) \Longleftrightarrow 2^{p-p'}(2q+1) = (2q'+1)$$

Comme $2q'+1$ est un entier impair, on a forcément $2^{p-p'} = 1$ et donc $p = p'$. Par conséquent $q = q'$, ce qui prouve l'injectivité de ψ.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathscr{P}(n)$: « il existe $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = 2^p(2q+1)$ ».

Initialisation : $\mathscr{P}(1)$ est vraie en prenant $p = 0$ et $q = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathscr{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ l'est encore. Pour cette hérédité, on va procéder par disjonction de cas :

- si $n+1$ est impair, alors il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que : $n+1 = 2q+1$. En prenant $p = 0$, on a $n+1 = 2^0(2q+1)$;
- si $n+1$ est pair, alors il existe $k \in [\![1,n]\!]$ tel que : $n = 2k$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $(\ell, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k = 2^\ell(2m+1)$, on a alors : $n+1 = 2^{\ell+1}(2m+1)$.

Finalement, dans les deux cas, on a montré que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
D'après le principe de récurrence forte, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On vient de montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ n = \psi(p,q).$$

Autrement dit, ψ est une application surjective.

(c) On a montré que ψ est bijective. On prend alors $f = f_1 \circ \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$. C'est la composée de deux applications bijectives, donc f est elle-même une application bijective, ce qui prouve que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

CORRIGÉS

Partie B - Le théorème de Cantor-Bernstein

1. (a) **Unicité** : soient z et z' deux éléments de F tels que $x = j(z)$ et $x = j(z')$. Par hypothèse, j est injective, donc $z = z'$ ce qui prouve l'unicité.
On va maintenant montrer que l'équation $j(z) = x$ a une solution, ce qui signifie que $x \in j(F)$. On doit donc montrer que $C \subset j(F)$. Pour cela, on remarque que $A_0 \subset B$, et donc $E\backslash B \subset E\backslash A_0$, ce qui implique que : $C = E\backslash B \subset E\backslash A_0 = j(F)$.
(b) B et C sont disjoints et leur réunion est E (ils forment une partition de E), On a bien défini une application sur tous les éléments de E. De plus, dans les deux cas, l'image est bien dans F. Donc ϕ est une application de E dans F.
2. (a) On va traiter les deux applications à part :
• Injectivité de $\phi_{|B}$.
Soit $(x, y) \in B^2$ tel que $\phi(x) = \phi(y)$. Par construction de ϕ, on a : $i(x) = i(y)$. Par hypothèse, i est injective, donc $x = y$, ce qui prouve que $\phi_{|B}$ est injective.
• Injectivité de $\phi_{|C}$.
Soit $(x, y) \in C^2$ tel que $\phi(x) = \phi(y)$, en composant par j à gauche et à droite : $j(\phi(x)) = j(\phi(y))$. Par construction de ϕ, on a : $j(\phi(x)) = x$ et $j(\phi(y)) = y$, ce qui prouve que $x = y$.
(b) Soient $x \in C$ et $y \in B$ tels que $\phi(x) = \phi(y)$. En composant par j, on a : $j(\phi(x)) = j(\phi(y))$, par définition de j, on a : $x = (j \circ i)(y)$.
(c) Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $\phi(x) = \phi(y)$. On a déjà vu que si x et y sont tous les deux éléments de B ou tous les deux éléments de C, alors $x = y$. Il ne nous reste plus qu'à étudier que le cas où $x \in C$ et $y \in B$ (qui est identique au cas où $x \in B$ et $y \in C$).
Par définition de l'ensemble B, comme $y \in B$, il existe un entier n tel que $y \in A_n$. En composant l'égalité par j on a encore : $x = j \circ i(y)$, ce qui signifie que $x \in A_{n+1}$ et donc $x \in B$. c'est impossible car $x \in C$ et $B \cap C = \varnothing$. On en déduit que $\phi(x) \neq \phi(y)$.
Finalement, l'application ϕ est injective.
3. Soit $z \in F$, on va chercher un antécédent par ϕ de z dans E. Notons que $j(z) \in E$, comme $\{B, C\}$ forme une partition de E, on va procéder par disjonction de cas :
• Si $j(z) \in C$, on pose $x = j(z)$, alors : $j(\phi(x)) = x = j(z)$. Par injectivité de j, on en déduit que $z = \phi(x)$.
• Si $j(z) \in B$, alors il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que : $j(z) \in A_n$.
Par définition $j(z) \in j(F)$, on est donc certain que $j(z) \notin A_0 = E\backslash j(F)$. Par conséquent $n \geq 1$ et il existe $x \in A_{n-1}$ tel que $j(z) = j(i(x))$. Mais $A_{n-1} \subset B$, donc $x \in B$ et $i(x) = \phi(x)$. On en déduit que $j(z) = j(\phi(x))$, de nouveau, l'injectivité de j assure que $z = \phi(x)$.
Dans les deux cas, on a montré que z admet un antécédent dans E par ϕ, donc ϕ est surjective.
Pour conclure, on a montré que ϕ est bijective, on a bien montré l'existence d'une bijection entre E et F.

Partie C - Dénombrabilité de $\mathbb{Q}$

1. On considère l'application $i : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ n & \longmapsto & \dfrac{n}{1} \end{array}$. Il est clair que i existe et est injective.
2. (a) Soit $(r, r') \in \mathbb{Q}^2$ tel que $\phi(r) = \phi(r')$. Alors, en notant (p, q) le représentant irréductible de r et (p', q') ce lui de r', on a : $(p, q) = (p', q')$.
Ainsi : $p = p'$ et $q = q'$ ce qui implique que $r = r'$ et prouve que ϕ est injective.
(b) L'application ϕ n'est pas surjective, en effet le couple $(2, 4)$ n'admet pas d'antécédent, la fraction $\dfrac{2}{4}$ en résultant n'étant pas irréductible.
(c) On considère l'application $j = \psi \circ \phi$ où ψ est l'application définie dans la question 4 de la partie A. j est une application de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$ et est la composée de deux applications injectives, elle est donc elle-même injective.
3. On a exhibé une application $i : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ injective et une application $j : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ injective, d'après le théorème de Cantor-Bernstein démontré dans la partie précédente, on en déduit qu'il existe une bijection entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{N}$, ce qui prouve que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

CHAPITRE 2

Compléments sur les études de fonctions

Plan du chapitre

Objectifs et compétences du programme

Capacités principales à maîtriser	Exercices associés
Faire l'étude complète d'une fonction.	Exercices 1, 4, 5, A, B, D
Apprendre les propriétés opératoires des fonctions usuelles.	Exercices 1, 2, 4, 8, A, B
Savoir utiliser les formules trigonométriques (hyperboliques et circulaires).	Exercices 2, 3, 5, 6, 7, 8, B, C, D, E, F

RETROUVEZ ICI LES FLASHCARDS INTERACTIVES POUR SE TESTER

www.lienmini.fr/40872-2

COURS

Dans ce chapitre, nous allons rappeler certaines notions sur les fonctions de la variable réelle qui seront largement réutilisées dans la suite de ce livre.
Enfin, nous présenterons plusieurs familles de fonctions, ce sera l'occasion de revenir sur la trigonométrie.

1 Rappels sur les fonctions de la variable réelle

1.1. Généralités

Définition 2.1. Ensemble de définition

Soit f une fonction à valeurs réelles. L'ensemble de définition de la fonction f est l'ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ existe.

Pour mieux comprendre certaines notions abstraites, il peut être intéressant de représenter le graphe d'une fonction.

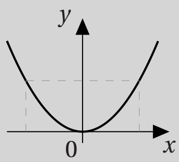
Définition 2.2. Représentation graphique

Soient I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. La représentation graphique de la fonction f est l'ensemble des points du plan défini par $\{M(x, f(x)),\ x \in I\}$.

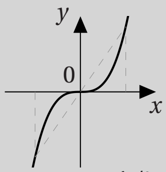
Définition 2.3. Parité

Soit f une fonction et $\mathscr{D}_f$ son domaine de définition.

- On dit que f est paire si :
  - $\mathscr{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 :
  $$\forall x \in \mathscr{D}_f,\ -x \in \mathscr{D}_f.$$
  - $\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f(-x) = f(x)$.



  La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- On dit que f est impaire si :
  - $\mathscr{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 :
  $$\forall x \in \mathscr{D}_f,\ -x \in \mathscr{D}_f.$$
  - $\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f(-x) = -f(x)$.



  La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Remarque
Une fonction peut être ni paire, ni impaire, c'est le cas par exemple de $x \mapsto e^x$.

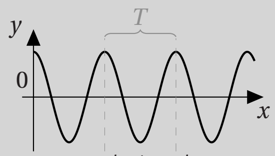
Exemple
Étudions la parité de la fonction $f : x \mapsto \ln(\sqrt{1+x^2}-x)$ définie sur $\mathbb{R}$. Le domaine de définition de f est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = \ln(\sqrt{1+x^2}+x) = \ln\left((\sqrt{1+x^2}+x)\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}-x}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}\right) = -f(x).$$

On en déduit que la fonction f est impaire.

Définition 2.4. Périodicité

Soit f une fonction et T un nombre réel strictement positif. On dit que f est T-périodique si :
- $\forall x \in \mathscr{D}_f,\ x+T \in \mathscr{D}_f$;
- $\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f(x+T) = f(x)$.

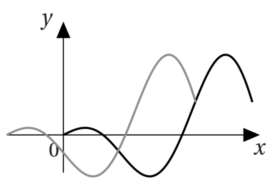


La courbe représentative d'une fonction T-périodique est invariante par translation de vecteur $T\vec{\imath}$.

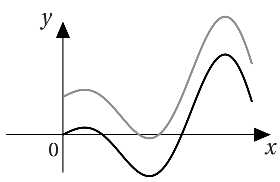
Remarque
On peut montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, qu'une fonction T-périodique f est aussi nT-périodique.

Exemple
Vérifions que la fonction $f : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique.
Notons dans un premier temps que f est définie sur $\mathbb{R}$, ainsi : $\forall x \in \mathscr{D}_f,\ x+1 \in \mathscr{D}_f$. De plus : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = x+1-\lfloor x+1 \rfloor = x+1-\lfloor x \rfloor - 1 = f(x)$.

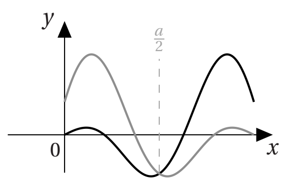
Sur les figures ci-dessous, on a représenté $\mathscr{C}_f$, la courbe d'une fonction (en noir), et la représentation graphique de fonctions obtenues par les transformations indiquées (en gris).



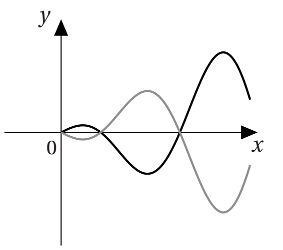
La courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(x+a)$ se déduit de $\mathscr{C}_f$ par translation de vecteur horizontal $(a, 0)$.



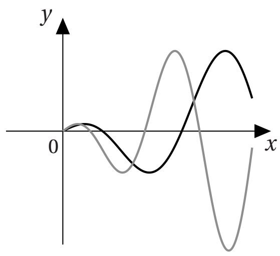
La courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(x)+a$ se déduit de $\mathscr{C}_f$ par translation de vecteur vertical $(0, a)$.



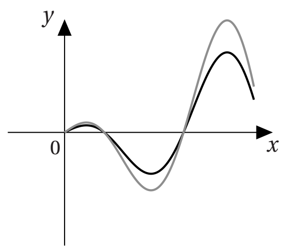
La courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(a-x)$ se déduit de $\mathscr{C}_f$ par symétrie d'axe d'équation $x = \dfrac{a}{2}$.



La courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(-x)$ se déduit de $\mathscr{C}_f$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.



La courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(ax)$ se déduit de $\mathscr{C}_f$ en la dilatant la courbe selon l'axe des abscisses.



La courbe représentative de la fonction $x \mapsto af(x)$ se déduit de $\mathscr{C}_f$ en la dilatant la courbe selon l'axe des ordonnées.

1.1.1. Opérations sur les fonctions

Définition 2.5.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère f et g deux fonctions définies sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Addition : on définit $f+g : x \mapsto f(x)+g(x)$.
- Multiplication : on définit $f \times g : x \mapsto f(x) \times g(x)$.
- Multiplication par un réel : on définit $\lambda f : x \mapsto \lambda f(x)$.
- Division : si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, on définit $\dfrac{f}{g} : x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Nous avions défini la composée de deux applications dans le premier chapitre de ce livre, nous rappelons cette définition pour les fonctions de la variable réelle.

Définition 2.6. Composition de deux fonctions

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions.
Lorsque $f(I) \subset J$, on peut définir l'application $g \circ f : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g\big(f(x)\big) \end{array}$

1.1.2. Variations encadrement et extremum d'une fonction

Définition 2.7.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

- On dit que f est croissante sur I si :
$$\forall (x,y) \in I^2,\ x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y).$$
Si les inégalités sont au sens strictes, on dira que f est strictement croissante sur I.
- On dit que f est décroissante sur I si :
$$\forall (x,y) \in I^2,\ x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y).$$
Si les inégalités sont au sens strictes, on dira que f est strictement décroissante sur I.

On dit que f est monotone sur I si f est croissante ou décroissante sur I.

Remarque

La définition précédente ne fait référence qu'à des implications, les réciproques ne sont pas forcément vraies. Voici ce qu'il faut retenir :

- Lorsque f est strictement croissante sur I, on a l'équivalence :
$$\forall (x, y) \in I^2,\ x \leq y \Longleftrightarrow f(x) \leq f(y).$$
Ce n'est pas vrai si f est simplement croissante sur I, on peut le vérifier avec une fonction constante par exemple.
- Lorsque f est strictement décroissante sur I, on a également :
$$\forall (x, y) \in I^2,\ x \leq y \Longleftrightarrow f(x) \geq f(y).$$
- Lorsque f est croissante (ou strictement croissante) sur I, on a :
$$\forall (x, y) \in I^2,\ x < y \Longleftrightarrow f(x) < f(y).$$
- Lorsque f est décroissante (ou strictement décroissante) sur I, on a :
$$\forall (x, y) \in I^2,\ x < y \Longleftrightarrow f(x) > f(y).$$

Ces résultats s'avèrent très utiles pour simplifier certaines inégalités.

Définition 2.8.

Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$.

- On dit que f est majorée sur A si :
$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ f(x) \leq M.$$
On dit alors que M est un majorant de f sur A.
- On dit que f est minorée sur A si :
$$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ f(x) \geq m.$$
On dit alors que m est un minorant de f sur A.
- On dit que f est bornée sur A si :
$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in A,\ m \leq f(x) \leq M.$$

Proposition 2.9.

Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$. f est bornée sur A si et seulement si $|f|$ est majorée sur A, c'est-à-dire : $\exists M \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in A,\ |f(x)| \leq M$.

Démonstration

($\Rightarrow$) On suppose que f est bornée sur A, alors : $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in A,\ m \leq f(x) \leq M$. On note K le maximum entre $|m|$ et $|M|$ (on prend les valeurs absolues car m et M peuvent être négatifs). Ainsi : $\forall x \in A, -K \leq f(x) \leq K$. On en déduit que : $\exists K \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in A, |f(x)| \leq K$.

($\Leftarrow$) On suppose que : $\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in A, |f(x)| \leq M$.

En utilisant une propriété de la valeur absolue, on a : $-M \leq f(x) \leq M$, ce qui prouve que f est bornée.

■

Définition 2.10.

Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$.

- Lorsque l'ensemble $\{f(x),\ x \in A\}$ admet un plus grand élément, cette valeur est appelée maximum de f sur A.
- Lorsque l'ensemble $\{f(x),\ x \in A\}$ admet un plus petit élément, cette valeur est appelée minimum de f sur A.

Définition 2.11.

Soient f une fonction définie sur un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in A$.

- On dit que f admet un maximum local en x_0 s'il existe un intervalle ouvert contenant x_0 tel que f admet un maximum en x_0 sur $A \cap I$.
- On dit que f admet un minimum local en x_0 s'il existe un intervalle ouvert contenant x_0 tel que f admet un minimum en x_0 sur $A \cap I$.

1.2. Rappels sur la continuité et la dérivabilité d'une fonction

Dans cette partie nous rappelons plusieurs résultats sur la continuité et la dérivabilité d'une fonction qui seront détaillés dans les chapitres 6 et 7.

1.2.1. Continuité d'une fonction

Définition 2.12.

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, $a \in A$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est continue en a si : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
Lorsque f est continue en tous points de A, on dit que f est continue sur A.

Attention !

Une fonction ne peut être continue qu'en un point où elle est définie !

Remarque

On peut voir la continuité d'une fonction comme le fait de pouvoir tracer son graphe sans lever le stylo.

Nous allons maintenant redonner deux résultats importants qui sont des conséquences de la continuité d'une fonction sur un intervalle. Nous admettons ces résultats pour le moment.

Théorème 2.13. Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur intervalle $[a, b]$. Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $y = f(\alpha)$.

Remarque

Le théorème des valeurs intermédiaires peut se résumer par cette phrase : l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Proposition 2.14. Théorème de la bijection

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. Si :

- f est continue sur I ;
- f est strictement monotone sur I.

Alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$.

Son application réciproque $f^{-1} : J \to I$ est une fonction continue et de même variation que f sur J.

1.2.2. Dérivabilité d'une fonction

Définition 2.15.

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, $a \in A$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction.

On dit que f est dérivable en a si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Lorsqu'elle existe, cette limite est appelée nombre dérivé de f en a et se note $f'(a)$.

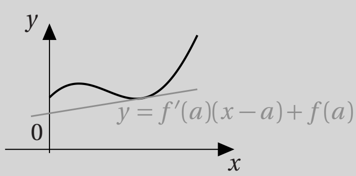
Remarque

La connaissance de la dérivabilité de certaines fonctions usuelles permet d'obtenir des limites qu'il est important de connaître :

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

Définition 2.16. Tangente à la courbe

On considère f une fonction dérivable en un point a. La droite de coefficient directeur $f'(a)$ passant par le point de coordonnée $(a, f(a))$ s'appelle tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse a. Une équation de droite est :
$y = f'(a)(x-a)+f(a)$.



Définition 2.17. Fonction dérivée

Soit f une fonction définie sur A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que f est dérivable sur A si f est dérivable en tout point de A.

L'application $f' : x \mapsto f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f.

Proposition 2.18.

Soit $f : A \to \mathbb{R}$. Si f est dérivable sur A alors elle est continue sur A.

Proposition 2.19.

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un même sous-ensemble A de $\mathbb{R}$. Alors :

- Combinaison linéaire : pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda f+\mu g$ est dérivable sur A et $(\lambda f+\mu g)'=\lambda f'+\mu g'$.
- Produit : la fonction fg est dérivable sur A et $(fg)'=f'g+fg'$.
- Quotient : si g ne s'annule pas sur A, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur A et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$.

Proposition 2.20. Composition

Soient f une fonction dérivable sur I et g une fonction dérivable sur J. Si $f(I)\subset J$, alors $g\circ f$ est dérivable sur I et $(g\circ f)'=f'\times(g'\circ f)$.

Exemple

Soit u une fonction dérivable sur un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$. De la proposition précédente, on tire les formules suivantes :

- la fonction e^u est dérivable sur A et $(\mathrm{e}^u)'=u'\mathrm{e}^u$;
- si u est strictement positive sur A alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$;
- si u est strictement positive sur A alors $\ln(u)$ est dérivable sur I et $(\ln(u))'=\dfrac{u'}{u}$.

Proposition 2.21.

Soit $f : I\longrightarrow J$ une fonction. Si :

- f est dérivable sur I ;
- f est bijective ;
- f' ne s'annule pas sur I.

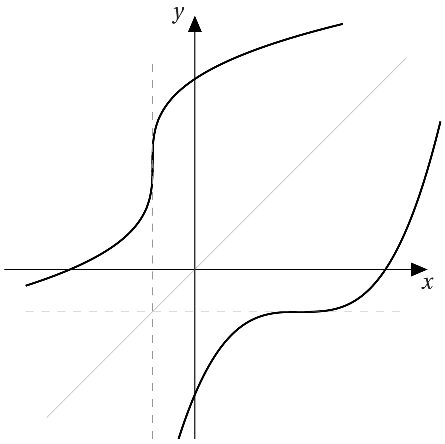
Alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur J et $(f^{-1})'=\dfrac{1}{f'\circ f^{-1}}$.

Remarque

Les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$, en effet :

$$(x,y)\in\mathscr{C}_f \Longleftrightarrow y=f(x)\Longleftrightarrow x=f^{-1}(y)\Longleftrightarrow (y,x)\in\mathscr{C}_{f^{-1}}.$$

On retrouve la même propriété de symétrie pour les tangentes, ce qui explique pourquoi on doit vérifier que la fonction f' ne s'annule pas dans la proposition précédente. En effet, si $f'(x)=0$, la tangente au point $(x,f(x))$ à la courbe représentant f est horizontale et donc, par symétrie, la tangente au point $(f(x),x)$ à la courbe représentant f^{-1} est verticale, ce qui signifie que la fonction f^{-1} n'est pas dérivable en $f(x)$.



1.2.3. Recherche des variations d'une fonction

Proposition 2.22.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- f est constante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.
- f est croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.

Attention !

Il est essentiel que I soit un intervalle. En effet, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{|x|}{x}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Sa dérivée est la fonction nulle sur $\mathbb{R}^*$, mais la fonction f n'est pas constante car $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$.

Proposition 2.23. Stricte monotonie

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- f est strictement croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ et n'est identiquement nulle sur aucun intervalle $[a, b]$ de I.
- f est strictement décroissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$ et n'est identiquement nulle sur aucun intervalle $[a, b]$ de I.

Connaître la dérivée d'une fonction va nous être utile pour dresser le tableau de variation de cette fonction (voir point méthodologique).

1.2.4. Dérivées successives d'une fonction

Définition 2.24.

Soit f une fonction dérivable sur un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$. Si f' est une fonction continue sur A, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A.

Exemple

Les fonctions polynomiales sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Définition 2.25.

Soit f une fonction définie sur un ensemble A de $\mathbb{R}$. On pose $f^{(0)} = f$ et on définit par récurrence pour tout $k \in \mathbb{N}$:
si $f^{(k)}$ est dérivable sur A, on dit que f est $k+1$ fois dérivable et on pose $f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$.
La fonction $f^{(k)}$ est appelée fonction dérivée k-ième de f.

Exemple

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, les fonctions polynomiales sont de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$.

2 Fonctions logarithmes, exponentielles et puissances

2.1. La fonction logarithme

Définition 2.26.

On appelle fonction logarithme népérien, notée $\ln$, l'unique fonction définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 1, dont la dérivée est la fonction inverse.

On déduit de cette définition les propriétés suivantes :

Proposition 2.27.

Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a :

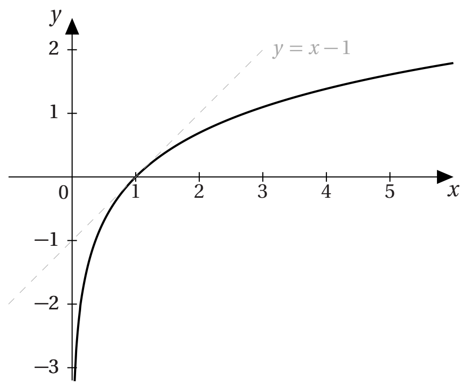
- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$;
- $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$;
- $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\ln(x^n) = n\ln(x)$;
- $\ln(x) \leq x - 1$;
- $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$;
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Démonstration

- On va montrer l'égalité $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$. Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$, on considère la fonction $f : x \mapsto \ln(xy) - \ln(x) - \ln(y)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (comme composée de fonctions dérivables) et :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{y}{xy} - \frac{1}{x} = 0.$$
La fonction f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$, or $f(1) = 0$, d'où l'égalité recherchée.
- On va montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.
On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $x \times \frac{1}{x} = 1$, soit $\ln(x \times \frac{1}{x}) = 0$. En utilisant le premier résultat : $\ln(x) + \ln(1/x) = 0$.
- Pour montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(x^n) = n\ln(x)$, on procède par récurrence en utilisant le fait que : $\ln(x^2) = 2\ln(x)$. On généralise cette relation sur $\mathbb{Z}$ en utilisant la relation : $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.
- Pour montrer l'inégalité, on étudie les variations de la fonction $f : x \mapsto \ln(x) - (x-1)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour montrer l'égalité $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$, on utilise les relations précédentes.
- Ces limites sont admises pour l'instant.

■

Voici la représentation graphique de la fonction logarithme népérien :



Définition 2.28.

Soit $a > 0$, on définit le logarithme en base a la fonction $\log_a : x \mapsto \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

Remarque

On note simplement le logarithme en base 10 : log. Cette fonction est notamment très utilisée en sciences de l'ingénieur ou en physique.

2.2. La fonction exponentielle

La fonction ln est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$. D'après le théorème de la bijection, la fonction logarithme népérien réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. On appelle fonction exponentielle, notée exp, la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien.

Proposition 2.29.

La fonction exp est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(\exp)'(x) = \exp(x).$$

Démonstration

La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, donc sa fonction réciproque est dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\exp)'(x) = \frac{1}{(\ln)'(\exp(x))} = \frac{1}{1/\exp(x)} = \exp(x).$$

La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$, ce qui justifie que exp est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. ■

Remarque

La définition même de la fonction exponentielle nous assure que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$.

Proposition 2.30.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

- $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$;
- $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$;
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \geq 1 + x$;
- $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\exp(x)^n = \exp(nx)$;
- $\exp\left(x - y\right) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$.

Démonstration

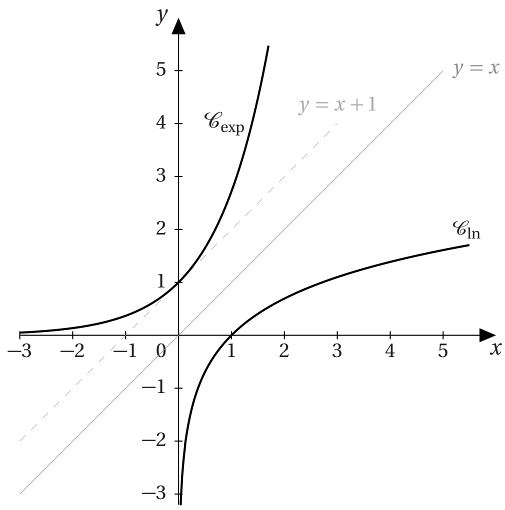
- Soient $(x, y) \in \mathbb{R}$, on va montrer que : $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$. On pose $a = \exp(x)$ et $b = \exp(y)$ de sorte que : $x = \ln(a)$ et $y = \ln(b)$, ainsi :
$$\exp(x+y) = \exp(\ln(a) + \ln(b)) = \exp(\ln(ab)) = ab = \exp(x)\exp(y).$$
- La relation $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ se déduit directement de la précédente.
- On montre la relation $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exp(x)^n = \exp(nx)$ par récurrence, on en déduit que cette relation est vraie pour $n \in \mathbb{Z}$.
- La relation $\exp\left(x - y\right) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$ est une conséquence des deux premières relations.
- On étudie les variations de la fonction $g : x \mapsto \exp(x) - (1 + x)$ sur $\mathbb{R}$.
- Les limites se déduisent directement des limites de la fonction ln.

■

Notation

On note $\mathrm{e} = \exp(1)$. En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, on peut montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.
C'est cette notation qui sera privilégiée dans la suite.

Voici la représentation graphique de la fonction exponentielle (c'est le symétrique de la courbe représentant la fonction ln par rapport à la droite d'équation $y = x$) :



2.3. Les fonctions puissances

Définition 2.31.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
$$x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}.$$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$, on pose :
$$x^n = \frac{1}{x^{-n}}.$$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, par convention : $x^0 = 1$.

Définition 2.32.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \longmapsto x^n$ est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Sa fonction réciproque est appelée « racine n-ième » et est notée $\sqrt[n]{\cdot}$.

On va généraliser la notion de puissance à un exposant non entier.

Définition 2.33.

On appelle la fonction puissance d'exposant $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $x \longmapsto x^\alpha := \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$.

Remarque

Cette définition est cohérente avec la définition de puissance rappelée précédemment, en effet :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbb{Z},\ x^n = \mathrm{e}^{\ln(x^n)} = \mathrm{e}^{n \ln(x)}.$$

Proposition 2.34.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$:

- $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$;
- $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$;
- $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$;
- $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha}$.

Démonstration

C'est une conséquence des propriétés algébriques des fonctions exponentielles et logarithme.

■

Remarque

On peut vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$. De plus : $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{1/n} = \lim\limits_{x \to 0^+} \mathrm{e}^{\ln(x)/n} = 0$.
La fonction $\sqrt[n]{\cdot}$ est donc le prolongement continu de $x \mapsto x^{1/n}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Proposition 2.35.

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$, alors la fonction $f : x \mapsto x^\alpha$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Démonstration

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$. f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur leur domaine de définition. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{\alpha}{x} \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)} = \frac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}.$$

■

Remarque

Comme conséquence immédiate de cette proposition, on a :

- si $\alpha > 0$, alors la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$;
- si $\alpha < 0$, alors la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

On va chercher à comparer les fonctions puissances aux autres fonctions usuelles déjà introduites.

Proposition 2.36. Les croissances comparées

Pour tout $(\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, on a :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)^\beta}{x^\alpha} = 0$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$;
- $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha \ln(x)^\beta = 0$;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\alpha \mathrm{e}^{\alpha x} = 0$.

Démonstration

On va seulement montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, les autres limites s'en déduisent par composition des limites et utilisation des propriétés algébriques des fonctions ln et exp.

Pour cela on étudie les variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^{x/2}}{x}$ qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas.
On peut montrer que la fonction f est croissante sur $[2,+\infty[$ et donc :

$$\forall x \in [2,+\infty[,\ f(x) \geq f(2).$$

En multipliant par $e^{x/2}$ qui est positif, on obtient :

$$\forall x \in [2,+\infty[,\ \frac{e^x}{x} \geq \frac{e}{2} e^{x/2}.$$

En utilisant le théorème de comparaison, on montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. ■

On peut être confronté à des fonctions puissances dont l'exposant est aussi une fonction.

Proposition 2.37.

Soient $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, u et v deux fonctions définies et dérivables sur un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$. Si $u(x) > 0$ pour tout $x \in A$, alors la fonction $f : x \mapsto u(x)^{v(x)}$ est dérivable sur A.

Remarque

Pour calculer la dérivée (cette remarque est aussi vraie pour les calculs de limite) d'une fonction de la forme $f : x \mapsto u(x)^{v(x)}$, on utilisera la forme exponentielle $f : x \mapsto e^{v(x)\ln(u(x))}$ (voir les méthodes pas à pas).

2.4. Les fonctions hyperboliques

Définition 2.38.

Les fonctions hyperboliques sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}.$$

Remarque

Comme une exponentielle est toujours strictement positive, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{ch}(x) > 0$, ce qui justifie l'existence de la fonction th.

Proposition 2.39.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1$.

Démonstration

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1.$$

■

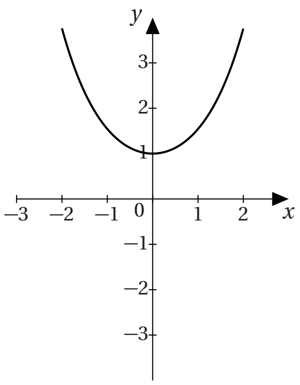
À partir de la définition de ces deux fonctions, on obtient directement les résultats suivants :

Proposition 2.40.

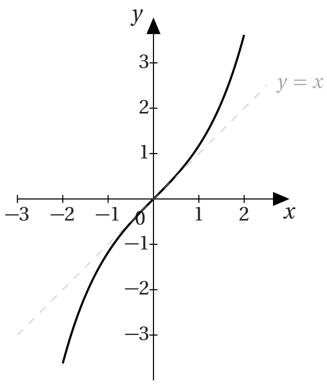
- La fonction ch est une fonction paire.
- Les fonctions sh et th sont des fonctions impaires.
- Les trois fonctions hyperboliques sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(\mathrm{ch})'(x) = \mathrm{sh}(x), \quad (\mathrm{sh})'(x) = \mathrm{ch}(x), \quad (\mathrm{th})'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)^2} = 1 - \mathrm{th}(x)^2.$$

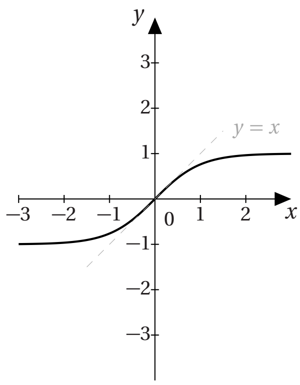
Voici la représentation graphique des fonctions circulaires :



La courbe représentative de la fonction ch.



La courbe représentative de la fonction sh.



La courbe représentative de la fonction th.

On peut trouver des propriétés similaires aux formules de trigonométries (voir la partie 3) satisfaites par les fonctions hyperboliques :

Proposition 2.41.

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

- $\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$;
- $\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b)$;
- $\mathrm{th}(a+b) = \dfrac{\mathrm{th}(a) + \mathrm{th}(b)}{1 + \mathrm{th}(a)\mathrm{th}(b)}$.

Si on pose $t = \mathrm{th}\left(\dfrac{a}{2}\right)$, on a :

- $\mathrm{ch}(a) = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$;
- $\mathrm{sh}(a) = \dfrac{2t}{1-t^2}$;
- $\mathrm{th}(a) = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

Démonstration

On développe les expressions en reprenant les définitions de chaque fonction. ∎

3 Les fonctions trigonométriques et leurs réciproques

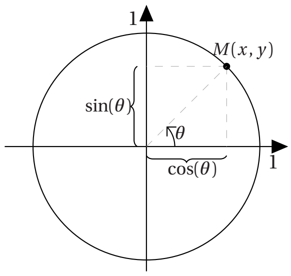
3.1. Les fonctions trigonométriques

Dans cette partie, nous allons rappeler les définitions des trois fonctions trigonométriques principales et démontrer l'ensemble des résultats à connaître sur ces fonctions.

3.1.1. sinus, cosinus et tangente d'un angle

Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé direct du plan. Soit M un point du cercle unité de centre O et de rayon 1 de coordonnées (x, y). On note θ une mesure de l'angle $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$, on pose alors :

$$\cos(\theta) = x,\ \sin(\theta) = y \text{ et } \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}.$$



Remarques

- Les fonctions sinus et cosinus sont donc intimement liées au cercle unité. On arrive à se convaincre facilement que ces fonctions sont 2π-périodiques. C'est pour cette raison que l'on travaillera souvent « modulo 2π », on rappelle que deux réels x et y sont congrus modulo 2π, s'il existe un entier relatif k tel que $x = y + 2k\pi$. On note : $x \equiv y\,[2\pi]$.
- Les expressions $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ étant définies comme l'abscisse et l'ordonnée d'un point du cercle unité, on a :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1.$$

C'est une relation essentielle qui est une conséquence de la paramétrisation d'un cercle.

Voici les valeurs particulières à connaître :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan(\theta)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

La lecture du cosinus et du sinus sur le cercle unité (appelé également cercle trigonométrique) permet d'obtenir un certain nombre de propriétés algébriques utiles.

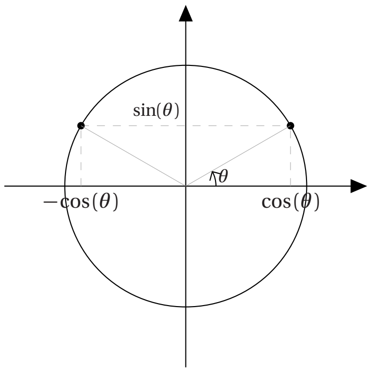
Proposition 2.42.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- $\cos(-x) = \cos(x)$;
- $\sin(-x) = -\sin(x)$;
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$;
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$;
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$;
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$;
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$;
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$;
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$;
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$.

Démonstration

On peut lire toutes ces relations sur le cercle trigonométrique, sur le schéma suivant, on illustre les relations : $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$ et $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$.



■

La résolution d'équations et d'inéquations trigonométriques peut être plus compliquée qu'il n'y paraît, il est nécessaire de se représenter ces équations/inéquations sur le cercle trigonométrique. Néanmoins, on pourra retenir le résultat suivant :

Proposition 2.43. Équations trigonométriques

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

- $\cos(x) = \cos(y)$ si et seulement si $\big(x = y\ [2\pi]$ ou $x = -y\ [2\pi]\big)$;
- $\sin(x) = \sin(y)$ si et seulement si $\big(x = y\ [2\pi]$ ou $x = \pi - y\ [2\pi]\big)$;
- $\tan(x) = \tan(y)$ si et seulement si $x = y\ [\pi]$.

Exemple

Résoudre $\cos(2x) = \frac{1}{2}$.

On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, on en déduit que :

- soit il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, ce qui signifie que $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, soit $x \equiv \frac{\pi}{6}\ [\pi]$.
- soit il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, ce qui signifie que $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, soit $x \equiv -\frac{\pi}{6}\ [\pi]$.

L'ensemble des solutions de cette équation est : $\left\{\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Proposition 2.44. Formules trigonométriques

Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, sous réserve d'existence des fonctions tangentes :
- $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$;
- $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$;
- $\tan(a+b)=\dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$.

On en déduit directement les formules suivantes :
- $\cos(2a)=2\cos(a)^2-1=1-2\sin(a)^2$;
- $\sin(2a)=2\sin(a)\cos(b)$;
- $\tan(2a)=\dfrac{2\tan(a)}{1-\tan(a)^2}$.

Démonstration

Soient a et b deux réels. Dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on pose A et B les points du cercle unité tels que : $(\vec{\imath},\overrightarrow{OA})=a$ et $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=b$.

On considère enfin A' le point du cercle unité tel que : $(\vec{\imath},\overrightarrow{OA'})=a+\dfrac{\pi}{2}$.

On a alors :

$$\overrightarrow{OA}=\cos(a)\vec{\imath}+\sin(a)\vec{\jmath},\ \overrightarrow{OB}=\cos(a+b)\vec{\imath}+\sin(a+b)\vec{\jmath},\ \overrightarrow{OA'}=-\sin(a)\vec{\imath}+\cos(a)\vec{\jmath}.$$

On remarque maintenant que, dans le repère orthonormé $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'})$, on a :

$$\overrightarrow{OB}=\cos(b)\overrightarrow{OA}+\sin(b)\overrightarrow{OA'}.$$

On en déduit, en exprimant les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$:

$$\overrightarrow{OB}=(\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b))\vec{\imath}+(\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b))\vec{\jmath}.$$

Les composantes d'un vecteur étant uniques, on en déduit les relations souhaitées.
Enfin, pour la tangente, on a :

$$\begin{aligned}\tan(a+b)&=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}\\&=\frac{\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}\\&=\frac{\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}\times\frac{\cos(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}\\&=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}\end{aligned}$$

■

Remarque

Pour tout $\theta\in\mathbb{R}\backslash\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$, en posant $t=\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$, on a :

- $\cos(\theta)=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$;
- $\sin(\theta)=\dfrac{2t}{1+t^2}$;
- $\tan(\theta)=\dfrac{2t}{1-t^2}$.

Proposition 2.45.

Pour tout $(p,q)\in\mathbb{R}$:

- $\cos(p)\cos(q)=\dfrac{1}{2}\big(\cos(p-q)+\cos(p+q)\big)$;
- $\sin(p)\sin(q)=\dfrac{1}{2}\big(\cos(p-q)-\cos(p+q)\big)$;
- $\sin(p)\cos(q)=\dfrac{1}{2}\big(\sin(p+q)+\sin(p-q)\big)$.

Démonstration

On vérifie directement les résultats en développant les termes de droite. ■

Proposition 2.46.

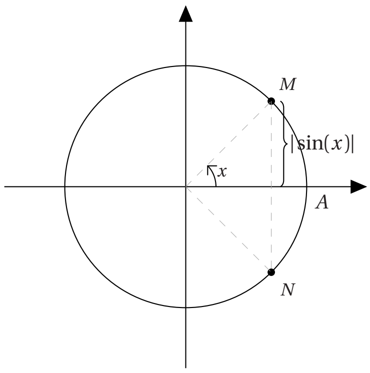
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|\sin(x)|\leq|x|$.

Démonstration

Dans un premier temps, notons que si $|x|\geq 1$, l'inégalité est vraie car $|\sin(x)|\leq 1$. On considère dans la suite un réel x tel que $|x|\leq\dfrac{\pi}{2}$.

Soit M un point du cercle unité et A le point de coordonnées $(1,0)$. On note x l'angle $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$ de sorte que l'arc $\overset{\frown}{AM}$ soit de longueur $|x|$. Soit N, le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses. Si x est négatif, on remarque que les points M et N sont inversés sur la figure. Dans les deux cas, la longueur du segment $[NM]$ est $2|\sin(x)|$.

Or, la longueur de la corde $[NM]$ est inférieure à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{NM}$, ce qui nous donne : $2|\sin(x)|<2|x|$, soit : $|\sin(x)|\leq|x|$.



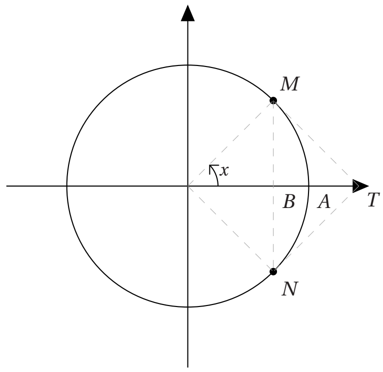
■

Proposition 2.47.

Pour tout $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, $|\tan(x)|\geq|x|$.

Démonstration

On reprend la situation de la preuve précédente avec les point M, N et A, on ajoute B le point d'intersection de (MN) avec l'axe des abscisses. On construit également la tangente au cercle passant par M et on note T son point d'intersection avec l'axe des abscisses. On a alors : $TM = |\tan(x)|$ (on le prouve en se plaçant dans le triangle OMT rectangle en M).
Par symétrie : $TN = |\tan(x)|$. Enfin, $TM + TN$ est supérieur à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{MN}$, ce qui prouve la relation souhaitée.



■

3.1.2. Les fonctions et leurs propriétés

Dans la suite, nous allons étudier le sinus, le cosinus et la tangente en tant que fonctions de la variable réelle.

Proposition 2.48.

Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
La fonction $\tan$ est continue sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Démonstration

On va commencer par montrer la continuité de la fonction sinus. Soit $a \in \mathbb{R}$, en utilisant les formules de la proposition 2.45 :

$$|\sin(h+a) - \sin(a)| = \left|2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{h}{2}+a\right)\right| \leq \left|2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\right| \leq 2\left|\frac{h}{2}\right| = |h|.$$

Le théorème d'encadrement permet de conclure que :

$$\lim_{h\to 0} \sin(h+a) = \sin(a).$$

La fonction sinus est bien continue en a et donc sur $\mathbb{R}$.

Pour la fonction cosinus, on remarque que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.
La fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues. Enfin, la fonction tan est continue sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ comme quotient de fonction continues dont le dénominateur ne s'annule pas. ■

Proposition 2.49.

Les limites suivantes sont à connaître :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Démonstration
On sait que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $|\tan(x)| \geq |x|$. On en déduit que, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $x \neq 0$, $|\cos(x)| \leq \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|$. Ainsi, au voisinage de 0, on a :

$$|\cos(x)| \leq \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \leq 1.$$

La continuité de la fonction cosinus en 0 et le théorème d'encadrement permettent de conclure que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\cos(x) = 1 - 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2$, et donc au voisinage de 0 :

$$\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{2\sin(x/2)^2}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

■

Proposition 2.50.

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\cos)'(x) = -\sin(x),\ \ (\sin)'(x) = \cos(x).$$

La fonction tangente est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\tan)'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2.$$

Démonstration
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = \frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)}{h} = \cos(x)\frac{\cos(h)-1}{h} + \sin(x)\frac{\sin(h)}{h}.$$

On a vu précédemment que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1 \text{ et } \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = 0.$$

On utilise ces limites pour prouver que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = -\sin(x).$$

De la même façon, on montre que :

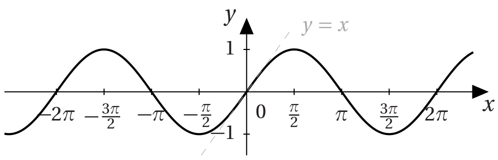
$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \cos(x).$$

Enfin, la fonction tan est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ comme quotient de fonction dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. La formule de la dérivée est une application de la dérivation d'un quotient.

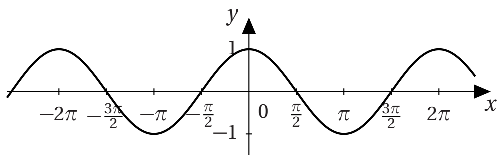
■

Voici la représentation graphique des trois fonctions trigonométriques :

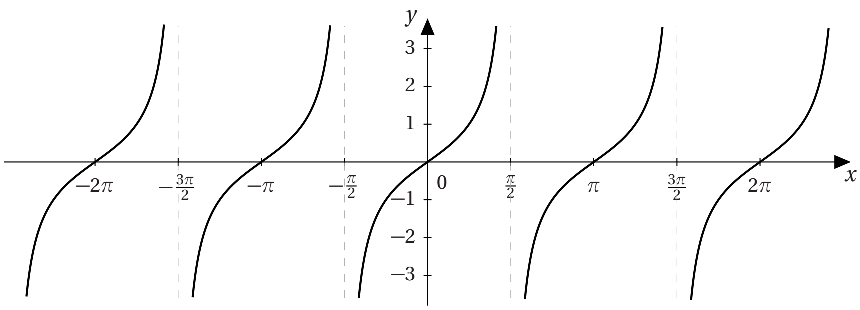
Remarque
La fonction cosinus est une fonction paire. Les fonctions sinus et tangentes sont des fonctions impaires.



La courbe représentative de la fonction sin.



La courbe représentative de la fonction cos.



La courbe représentative de la fonction tan.

3.2. Les fonctions trigonométriques réciproques

3.2.1. La fonction arcsin

La fonction sinus est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. L'image de cet intervalle par cette fonction est $[-1, 1]$. D'après le théorème de la bijection, la fonction sinus réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$. On note arcsin sa bijection réciproque.

Proposition 2.51.

Par définition de la fonction arcsin, on a :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ \arcsin(\sin(x)) = x \text{ et } \forall y \in [-1, 1],\ \sin(\arcsin(y)) = y.$$

Remarque

En particulier, on a :

- $\arcsin(0) = 0$
- $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$
- $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$
- $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$
- $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$

Proposition 2.52.

La fonction arcsin est dérivable sur l'intervalle $]-1,1[$ et :

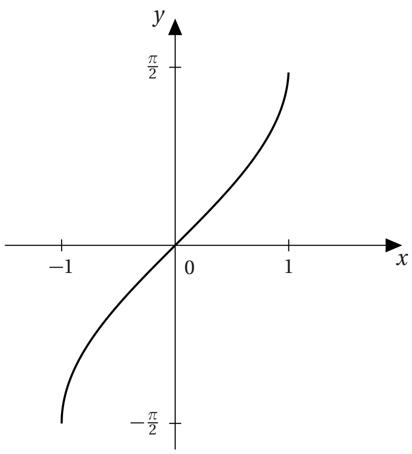
$$\forall x \in]-1,1[,\ (\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La fonction arcsin est strictement croissante sur $[-1,1]$.

Démonstration

C'est une conséquence du résultat de dérivation de la réciproque d'une fonction bijective. ■

Voici la représentation graphique de la fonction arcsin :



Remarque

La fonction arcsin est impaire.

3.2.2. La fonction arccos

La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0,\pi]$. L'image de cet intervalle par cette fonction est $[-1,1]$. D'après le théorème de la bijection, la fonction cosinus réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$. On note arccos sa bijection réciproque.

Proposition 2.53.

Par définition de la fonction arccos, on a :

$$\forall x \in [0,\pi],\ \arccos(\cos(x)) = x \text{ et } \forall y \in [-1,1],\ \cos(\arccos(y)) = y.$$

Remarque

En particulier, on a :

- $\arccos(0) = \dfrac{\pi}{2}$

- $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$
- $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$
- $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$
- $\arccos(1)=0$

Proposition 2.54.

La fonction arccos est dérivable sur l'intervalle $]-1,1[$ et :

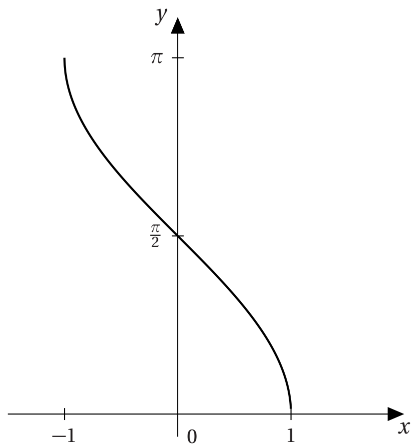
$$\forall x \in]-1,1[,\ (\arccos)'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La fonction arccos est strictement décroissante sur $[-1,1]$.

Démonstration

C'est une conséquence du résultat de dérivation de la réciproque d'une fonction bijective. ■

Voici la représentation graphique de la fonction arccos :



Proposition 2.55.

Pour tout $x\in[-1,1]$, on a :

- $\arcsin(x)+\arccos(x)=\frac{\pi}{2}$;
- $\arccos(x)+\arccos(-x)=\pi$.

Démonstration

- On considère la fonction $f : x \mapsto \arcsin(x)+\arccos(x)$ qui est définie et dérivable sur $]-1,1[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]-1,1[$. On a :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}=0.$$

La fonction f est donc constante sur l'intervalle $]-1,1[$ et :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2}.$$

On vérifie enfin que cette égalité reste vraie pour $x = 1$ et $x = -1$.

- On considère la fonction $g : x \mapsto \arccos(x) + \arccos(-x)$ qui est définie et dérivable sur $]-1,1[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]-1,1[$. On a :

$$\forall x \in]-1,1[,\ g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(-x)^2}} = 0.$$

La fonction g est donc constante sur l'intervalle $]-1,1[$ et :

$$\forall x \in]-1,1[,\ g(x) = g(0) = \pi.$$

On vérifie enfin que cette égalité reste vraie pour $x = 1$ et $x = -1$.

■

3.2.3. La fonction arctan

La fonction tangente est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. L'image de cet intervalle par cette fonction est $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la bijection, la fonction tangente réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. On note arctan sa bijection réciproque.

Proposition 2.56.

Par définition de la fonction arctan, on a :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \arctan(\tan(x)) = x \text{ et } \forall y \in \mathbb{R},\ \tan(\arctan(y)) = y.$$

Remarque

En particulier, on a :

- $\arctan(0) = 0$
- $\arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$
- $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

Proposition 2.57.

La fonction arctan est dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et :

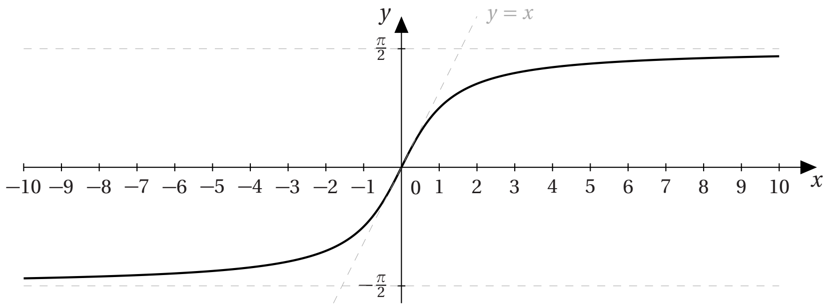
$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Notons que arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

C'est une conséquence du résultat de dérivation de la réciproque d'une fonction bijective. ■

Voici la représentation graphique de la fonction arctan :



Remarque
La fonction arctan est impaire.

Proposition 2.58.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Démonstration
On considère la fonction $f : x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1/x^2}{1+1/x^2} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2+1} = 0.$$

La fonction f est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = f(1) = \frac{\pi}{2}.$$

■

Remarque
Pour $x \in \mathbb{R}_-^*$, on a :

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

RETROUVEZ ICI LA SYNTHÈSE DE CE CHAPITRE À TÉLÉCHARGER
www.lienmini.fr/40872-B

MÉTHODES PAS À PAS

Méthode 1. Dresser le tableau de variations d'une fonction.

Conseils méthodologiques

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- On étudie la dérivabilité de la fonction sur I.
- On calcule l'expression de f' que l'on factorise si possible.
- On dresse le tableau de signe de f' sur I.
- On en déduit le tableau de variation de f de I.

Connaître le tableau de variation d'une fonction est utile pour deux situations particulières que nous détaillons dans les deux exemples.

Application de la méthode : déterminer des extremums.

Déterminer le maximum de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$.

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, le dénominateur ne s'y annulant pas). De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{x \times 1/x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}.$$

Un carré étant toujours positif, $f'(x)$ est du même signe que $1-\ln(x)$. On étudie le signe de cette expression : $1-\ln(x) \geq 0 \iff \ln(x) \leq 1 \iff x \leq \mathrm{e}$. Notons que (le calcul de ces limites sera présenté ultérieurement) :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0,\ f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^{-1}.$$

On en déduit le tableau de variation de f :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

La fonction f admet e^{-1} pour maximum atteint pour $x = \mathrm{e}$.

Application de la méthode : démontrer des inégalités.

Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sin(x) \leq x$.
On considère la fonction $g : x \mapsto x - \sin(x)$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$). De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 1 - \cos(x).$$

Un cosinus prend ses valeurs dans l'intervalle $[-1, 1]$, donc $g'(x)$ est toujours positif.
La fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$ et $g(0) = 0$. on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) \geq g(0) \Longleftrightarrow x - \sin(x) \geq 0 \Longleftrightarrow \sin(x) \leq x.$$

Méthode 2. Réduire le domaine de définition.

Conseils méthodologiques

Quand on a déterminé le domaine de définition d'une fonction, il peut être judicieux d'étudier la parité, ou la périodicité de cette fonction. Ces propriétés permettent de réduire le domaine d'étude et de conclure avec des propriété de symétries (pour la parité) ou de translation (pour la périodicité)

Application de la méthode

Étudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$.

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas). De plus, f est une fonction paire, en effet son domaine de définition est symétrique par rapport à l'origine et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = \frac{e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2} = \frac{e^{-x}}{e^{-2x}(e^x+1)^2} = f(x).$$

On va simplement étudier cette fonction sur $\mathbb{R}_+$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{e^x(e^x+1)^2 - 2e^{2x}(e^x+1)}{(e^x+1)^4} = \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}.$$

On en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) \leq 0.$$

La fonction f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
Calculons la limite en $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^{2x}(1+e^{-x})2} = 0.$$

En utilisant le fait que f est paire et donc que l'axe des ordonnées est un axe de symétrie, on en déduit le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

Méthode 3. Étudier une fonction puissance de la forme $x \longmapsto u(x)^{v(x)}$.

Conseils méthodologiques

Lorsque l'on est confronté à une fonction de la forme $x \mapsto u(x)^{v(x)}$, on transforme son expression pour se ramener à une forme exponentielle.

Application de la méthode

Étudier la fonction $f : x \mapsto x^x$. On commence par écrire cette fonction sous la forme exponentielle : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \mathrm{e}^{x\ln(x)}$. Cette fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (comme composée de fonctions dérivables). Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = (\ln(x)+1)\mathrm{e}^{x\ln(x)}.$$

Notons que $\ln(x)+1 \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq \mathrm{e}^{-1}$.
Calculons les limites : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$, d'après les croissances comparées. Par composition des limites on a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$. On trouve de même $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
f	$\Vert$ 1	$\searrow$	$\mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

EXERCICES

Vrai ou Faux

		Vrai	Faux
a)	Toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ étant 3-périodique et 2-périodique est 1-périodique.	☐	☐
b)	Toute fonction continue sur un intervalle I est dérivable sur I.	☐	☐
c)	Il n'existe pas de fonction à la fois paire et impaire.	☐	☐
d)	La fonction sinus est 4π-périodique.	☐	☐
e)	$\cos(x) = \cos(y)$ si et seulement si $x = y\,[2\pi]$.	☐	☐
f)	Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) = \frac{1}{2}\big(\mathrm{ch}(x+y) + \mathrm{ch}(x-y)\big)$.	☐	☐
g)	Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\tan(\arctan(x)) = x$.	☐	☐
h)	Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\arcsin(\sin(x)) = x$.	☐	☐
i)	En cas d'existence, $\dfrac{2\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(2x)}{x - \ln(\mathrm{ch}(x)) - \ln(2)} = -\dfrac{1+\mathrm{e}^{-2x}}{\ln(1+\mathrm{e}^{-2x})}$.	☐	☐

Exercices d'application du chapitre 2

●○○ 10 min.

EXERCICE 1

Montrer que : $\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $\ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geq \dfrac{\ln(x) + \ln(y)}{2}$.

●●● 20 min.

EXERCICE 2

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $\mathrm{ch}(x) = 2$;
2. $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$;
3. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$;
4. $\arcsin(x) = \arccos(x)$.

●●○ 15 min.

EXERCICE 3

Montrer que :

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\arctan(\mathrm{sh}(x)) = \arccos\left(\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan(\mathrm{th}(x)) = \dfrac{1}{2}\arctan(\mathrm{sh}(2x))$.

●●● 15 min.

EXERCICE 4

Étudier la fonction $f : x \mapsto \left(\dfrac{x-1}{x}\right)^x$.

●●○ 10 min.
EXERCICE 5

Représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \arcsin(\sin(x))$.

●●● 15 min.
EXERCICE 6

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\arctan(x)+\arctan(x^3)=\dfrac{3\pi}{4}$.

●●○ 10 min.
EXERCICE 7

Calculer $\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)+\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right)+\arctan\left(\dfrac{1}{8}\right)$.

●○○ 5 min.
EXERCICE 8

Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $\left(\dfrac{1+\operatorname{th}(x)}{1-\operatorname{th}(x)}\right)^n=\dfrac{1+\operatorname{th}(nx)}{1-\operatorname{th}(nx)}$.

Exercices d'approfondissement du chapitre 2

●●○ 10 min.
EXERCICE A

Trouver la plus grande valeur de $\sqrt[n]{n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

●○○ 15 min.
EXERCICE B

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}$.

1. Étudier l'ensemble de définition et les variations de f en précisant les limites aux bornes.
2. Montrer que la restriction de f à $\mathbb{R}_+$ est une bijection. On note f^{-1} la réciproque.
3. Donner les variations ainsi que les limites aux bornes de f^{-1}.
4. Tracer les courbes représentatives des deux fonctions f et f^{-1}.
5. Expliciter la fonction f^{-1}.

●○○ 15 min.
EXERCICE C

1. Montrer que $\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)+\arctan\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.
2. Pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$, exprimer $\tan(4x)$ en fonction de $\tan(x)$.
3. En déduire la formule : $\dfrac{\pi}{4}=4\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right)-\arctan\left(\dfrac{1}{239}\right)$.

●●○ 5 min.
EXERCICE D

1. Montrer que pour tout $x\in[0,1]$: $\arcsin(\sqrt{x})=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\arcsin(2x-1)$.
2. Retrouver ce résultat en utilisant les formules de trigonométrie en posant $x=\sin(u)^2$.

●●○ 15 min.
EXERCICE E

1. Soient a et b deux réels de sorte que $\tan(a)$, $\tan(b)$ et $\tan(a-b)$ soient bien définis. Exprimer $\tan(a-b)$ en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$.
2. Soit $p\in\mathbb{N}$. Calculer $\arctan(p+1)-\arctan(p)$.
3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, calculer $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\arctan\left(\dfrac{1}{k^2+k+1}\right)$. En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

●●● **EXERCICE F**
40 min.

1. (a) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)=\frac{\sin(\theta)}{2^n\sin(\theta/2^n)}.$$

   (b) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)=\frac{\sin(\theta)}{\theta}.$$

   (c) Que se passe-t-il avec cette égalité si $\theta\in\{2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

2. Montrer que pour tout $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan(x)}.$$

Problème

●○○ **Problème I** **Autour de la fonction argth**
60 min.

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés de la fonction réciproque de la fonction tangente hyperbolique.

Partie A - La fonction tangente hyperbolique

1. Étudier les variations de la fonction tangente hyperbolique. Dresser son tableau de variation et calculer les limites aux bornes de son domaine de définition.
2. Montrer que th induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$. On appelle argument tangente hyperbolique, et on note argth $:]-1,1[\to\mathbb{R}$ sa bijection réciproque.

Partie B - La fonction argument tangente hyperbolique

1. Montrer que la fonction argth est dérivable sur $]-1,1[$ et :

$$\forall x\in]-1,1[,\ (\mathrm{argth})'(x)=\frac{1}{1-x^2}.$$

2. Pour tout $y\in]-1,1[$, résoudre l'équation $\mathrm{th}(x)=y$. En déduire l'expression de $\mathrm{argth}(y)$.
3. En utilisant `Python`, représenter sur un même graphique les courbes représentatives de th et argth.

Partie C - Application

Dans cette partie, on propose trois façons différentes de simplifier l'expression de la fonction définie par :

$$f(x)=\mathrm{argth}\left(\frac{3x+x^3}{1+3x^2}\right).$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. (a) Exprimer pour tout $a\in\mathbb{R}$, $\mathrm{th}(3a)$ en fonction de $\mathrm{th}(a)$.
   (b) En déduire pour $x\in]-1,1[$, une expression simplifiée de $f(x)$.
3. (a) Pour tout $x\in]-1,1[$, calculer les dérivées de f et de $h : x\mapsto 3\mathrm{argth}(x)$.
   (b) En déduire pour $x\in]-1,1[$, une expression simplifiée de $f(x)$.
4. Utiliser l'expression obtenue dans la question 2 de la partie B pour trouver une expression simplifiée de $f(x)$.

EXERCICES

CORRIGÉS

Corrigés des Vrai/Faux

a) Vrai. On vérifie que $f(x+1) = f(x+3-2) = f(x+3) = f(x)$.
b) Faux. La fonction valeur absolue est continue en 0 mais n'y est pas dérivable.
c) Faux. La fonction nulle est paire et impaire sur $\mathbb{R}$. D'ailleurs, c'est la seule !
d) Vrai. Elle est 2π-périodique, donc en particulier $2k\pi$-périodique avec $k \in \mathbb{N}^*$.
e) Faux. $\cos(x) = \cos(y)$ si et seulement si $\left(x = y\, [2\pi] \text{ ou } x = -y\, [2\pi] \right)$.
f) Vrai, il suffit de développer l'expression de gauche.
g) Vrai, par définition.
h) Faux. Cette égalité n'est vraie que pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
i) Vrai. Il suffit de développer le calcul.

Corrigés des exercices d'application

EXERCICE 1

Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{\ln(x)+\ln(y)}{2}$ qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée et combinaison linéaire de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{1/2}{(x+y)/2} - \frac{1}{2x} = \frac{x-y}{2x(x+y)}.$$

Comme x et y sont strictement positifs, $f'(x)$ est du même signe que $x - y$, on en déduit le tableau de variation de f :

x	0		y		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$\searrow$	0	$\nearrow$	

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \geq 0$, ce qui prouve l'inégalité souhaitée.

EXERCICE 2

1. On a : $\operatorname{ch}(x)=2 \Longleftrightarrow \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=2 \Longleftrightarrow e^{2x}-4e^x+1=0$. On pose $X=e^x$ et on résout l'équation du second degré : $X^2-4X+1=0$ qui admet deux racines réelles strictement positives : $X_1=2-\sqrt{3}$ et $X_2=2+\sqrt{3}$. On revient à la variable de départ :

$$\operatorname{ch}(x)=2 \Longleftrightarrow \left(e^x=2-\sqrt{3} \text{ ou } e^x=2+\sqrt{3}\right) \Longleftrightarrow \left(x=\ln(2-\sqrt{3}) \text{ ou } x=\ln(2+\sqrt{3})\right).$$

L'équation admet donc deux racines distinctes : $\ln(2-\sqrt{3})$ et $\ln(2+\sqrt{3})$.

2. Rappelons que : $\forall x\in\mathbb{R}, \sin(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$. On va utiliser cette relation pour se ramener à une égalité entre deux cosinus :

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) \Longleftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{4}-2x\right).$$

On en déduit que :

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) \Longleftrightarrow \left(x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}-2x+2k\pi \text{ ou } x-\frac{\pi}{4}=2x-\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ \text{avec } k\in\mathbb{Z}\right).$$

En conclusion, les solutions de l'équation sont les réels x tels que :

$$x=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \text{avec } k\in\mathbb{Z}.$$

3. Notons dans un premier temps que l'équation n'a de sens que pour $x\in\mathbb{R}_+^*$. On passe par la forme exponentielle pour la résolution :

$$x^{\sqrt{x}}=(\sqrt{x})^x \Longleftrightarrow e^{\sqrt{x}\ln(x)}=e^{x\ln(\sqrt{x})}.$$

On utilise ensuite l'injectivité de la fonction exponentielle :

$$x^{\sqrt{x}}=(\sqrt{x})^x \Longleftrightarrow \sqrt{x}\ln(x)=x\ln(\sqrt{x}) \Longleftrightarrow \sqrt{x}\ln(x)=\frac{x}{2}\ln(x) \Longleftrightarrow \sqrt{x}\ln(x)\left(1-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)=0.$$

Comme x est strictement positif, $\sqrt{x}$ est non nul, soit :

$$x^{\sqrt{x}}=(\sqrt{x})^x \Longleftrightarrow \left(\ln(x)=0 \text{ ou } \sqrt{x}=2\right) \Longleftrightarrow \left(x=1 \text{ ou } x=4\right).$$

4. Cette équation n'a de sens que pour $x\in[-1,1]$. Comme $\arccos(x)\in[0,\pi]$ et $\arcsin(x)\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $\arccos(x)$ et $\arcsin(x)$ sont dans l'intervalle $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Par injectivité de la fonction sin sur cet intervalle, on a :

$$\arcsin(x)=\arccos(x) \Longleftrightarrow x=\sin(\arccos(x)).$$

On va chercher à simplifier l'expression $\sin(\arccos(x))$. On rappelle que $\arccos(x)\in[0,\pi]$, de sorte que $\sin(\arccos(x))\geq 0$, ainsi :

$$\sin(\arccos(x))=\sqrt{1-\cos(\arccos(x)^2}=\sqrt{1-x^2}.$$

On est donc amené à résoudre l'équation : $x=\sqrt{1-x^2}$. L'inconnue x est donc forcément positif, on peut passer au carré :

$$x=\sqrt{1-x^2} \Longleftrightarrow \left(x\geq 0 \text{ et } x^2=1-x^2\right) \Longleftrightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Finalement, l'équation admet une unique solution : $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

CORRIGÉS

EXERCICE 3

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \arctan(\mathrm{sh}(x)) - \arccos\left(\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)$ qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme et composées de fonctions dérivables. On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) &= \frac{\mathrm{ch}(x)}{1+\mathrm{sh}(x)^2} - \frac{(-1)}{\sqrt{1-1/\mathrm{ch}(x)^2}}\frac{-\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)^2}\\ &= \frac{\mathrm{ch}(x)}{1+\mathrm{sh}(x)^2} - \frac{\mathrm{ch}(x)}{\sqrt{\mathrm{ch}(x)^2-1}}\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)^2}\\ &= \frac{\mathrm{ch}(x)}{1+\mathrm{sh}(x)^2} - \frac{1}{|\mathrm{sh}(x)|}\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)^2}\end{aligned}$$

On utilise alors le fait que la fonction sh est positive sur $\mathbb{R}_+$ et la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1.$$

On trouve alors : $f'(x) = 0$.
La fonction f est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = f(0) = 0.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\mathrm{th}(x) \in]-1,1[$. La fonction tan est bijective de $\left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right[$ sur $]-1,1[$, il existe donc un unique $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right[$ tel que $\mathrm{th}(x) = \tan(\theta)$. Alors :

$$\mathrm{sh}(2x) = 2\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{th}(x)}{1-\mathrm{th}(x)^2} = \frac{\tan(\theta)}{1-\tan(\theta)^2} = \tan(2\theta).$$

Finalement : $\arctan(\mathrm{th}(x)) = \theta$ et $\dfrac{1}{2}\arctan(\mathrm{sh}(2x)) = \theta$, d'où la relation souhaitée.

Remarque
On pouvait également utiliser une étude de fonction.

EXERCICE 4

Pour commencer, on repasse à la forme exponentielle :

$$f(x) = \exp\left(x\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right).$$

Ainsi, $f(x)$ existe si et seulement si $\dfrac{x-1}{x} > 0 \Longleftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$. Le domaine de définition de f est $\mathscr{D}_f =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.
f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ comme composée de fonctions dérivables et pour tout $x \in \mathscr{D}_f$:

$$f'(x) = \left(\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x-1}\right)f(x).$$

On est donc amené à étudier le signe de $g : x \mapsto \ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{x-1}$. g est une fonction définie et dérivable sur $\mathscr{D}_f$ et :

$$\forall x \in \mathscr{D}_f,\ g'(x) = -\frac{1}{x(x-1)^2}.$$

Calculons les limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
On peut ajouter que $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = +\infty$ même si nous n'en avons pas besoin pour cet exercice.
On en déduit le tableau de variation de g :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$				$+$	
g	0	$\nearrow$	$+\infty$		$+\infty$	$\searrow$	0

La fonction g est donc toujours positive sur $\mathscr{D}_f$, ce qui permet trouver le signe de f' et les variations de f.
On va s'intéresser aux limites maintenant :

- Limite en $-\infty$.

On pose $u = -\dfrac{1}{x}$ de sorte que lorsque x tend vers $-\infty$, u tend vers 0. On a donc :

$$\lim_{x \to -\infty} x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \lim_{u \to 0} -\frac{\ln(1+u)}{u} = -1.$$

Par composition des limites, on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \mathrm{e}^{-1}$.
On procède de la même façon pour trouver la limite en $+\infty$ qui est aussi e^{-1}.

- Limite en 0^-.

On pose $X = -x$ de sorte que lorsque x tend vers 0^-, X tend vers 0^+. On a donc :

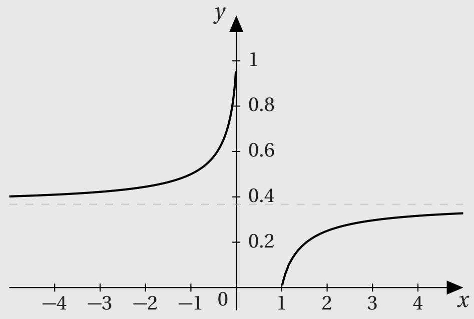
$$\lim_{x \to 0^-} x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \lim_{X \to 0^+} -X \ln\left(1 + \frac{1}{X}\right) = \lim_{X \to 0^+} -X \ln\left(\frac{X+1}{X}\right) = \lim_{X \to 0^+} -X \ln(1+X) + X \ln(X) = 0.$$

Par composition des limites, on a : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$.

- Limite en 1^+.

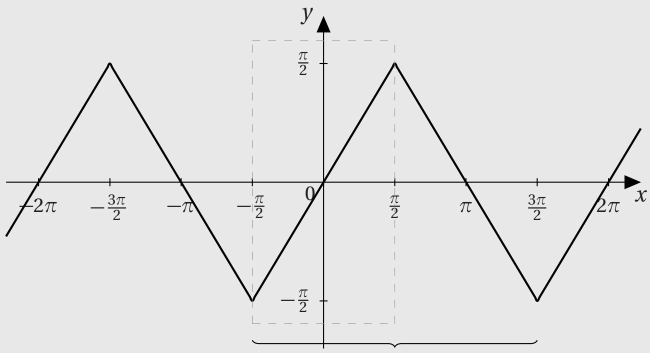
On a : $\lim\limits_{x \to 1^+} x \ln\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$.
Par composition des limites, on a : $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$				$+$	
f	e^{-1}	$\nearrow$	1		0	$\searrow$	e^{-1}



EXERCICE 5

Notons dans un premier temps que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) \in [-1,1]$ et arcsin est définie sur $[-1,1]$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$. On remarque également que f est 2π-périodique (c'est une conséquence du fait que la fonction sinus est elle-même 2π-périodique). On peut restreindre l'étude à un intervalle de longueur 2π.
De plus, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(\pi - x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \arcsin(\sin(x)) = f(x)$.
On en déduit que la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe. On peut donc restreindre le domaine d'étude à l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. En effet, l'axe de symétrie nous permettra de trouver le reste de la courbe sur une période, et le caractère périodique de cette fonction nous permet de trouver le reste de la courbe par translation.
Par définition, pour tout $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a : $f(x) = \arcsin(\sin(x)) = x$. On en déduit directement le graphe de la fonction f :



EXERCICE 6

L'équation est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Procédons par analyse-synthèse.
Analyse : Soit x une solution de l'équation, alors :$\tan(\arctan(x) + \arctan(x^3)) = \tan\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$.
On utilise la formule de la tangente d'une somme :

$$\frac{x^3 + x}{1 - x^4} = -1 \Longleftrightarrow \frac{x(x^2+1)}{(1-x^2)(1+x^2)} = -1 \Longleftrightarrow \frac{x}{1-x^2} = -1 \Longleftrightarrow x^2 - x - 1 = 0.$$

On résout cette équation du second degré qui admet deux solutions réelles : $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Synthèse : On va étudier la fonction $f : x \mapsto \arctan(x) + \arctan(x^3)$. C'est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, comme composée de fonctions dérivables, et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{3x^2}{1+x^6} > 0.$$

La fonction f est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de plus :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi.$$

D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\pi, \pi[$.
L'équation $f(x) = \dfrac{3\pi}{4}$ admet donc une unique solution dans $\mathbb{R}$. Dans l'analyse on a trouvé deux candi-

dats pour cette solution, il faut en exclure un. Remarquons que $f(0) = 0 \leq \frac{3\pi}{4}$, comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, la solution de l'équation est forcément positive.

Pour conclure, cette équation admet une unique solution : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

EXERCICE 7

Dans un premier temps, on peut remarquer que : $0 < \frac{1}{8} < \frac{1}{5} < \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$.
En utilisant la stricte croissance de la fonction arctan sur $\mathbb{R}$, on a :

$$0 \leq \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right) < 3\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}.$$

On peut calculer la tangente de cette expression. La formule donnant la tangente d'une somme permet de montrer que :

$$\tan(a+b+c) = \frac{\tan(a)+\tan(b)+\tan(c)-\tan(a)\tan(b)\tan(c)}{1-\tan(a)\tan(b)-\tan(a)\tan(c)-\tan(c)\tan(b)}.$$

On applique cette formule à la somme précédente pour trouver :

$$\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right)\right) = 1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

On en déduit alors que :

$$\exists k \in \mathbb{Z},\ \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

On a vu que $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ainsi :

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

EXERCICE 8

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $1+\operatorname{th}(x) = 1 + \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{2e^x}{e^x + e^{-x}}$ et $1-\operatorname{th}(x) = \frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. On en déduit que : $\frac{1+\operatorname{th}(x)}{1-\operatorname{th}(x)} = \frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x}$. Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{1+\operatorname{th}(x)}{1-\operatorname{th}(x)}\right)^n = (e^{2x})^n = e^{2nx} = \frac{1+\operatorname{th}(nx)}{1-\operatorname{th}(nx)}$.

Corrigés des exercices d'approfondissement

EXERCICE A

On rappelle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sqrt[n]{n} = n^{1/n}$. On va étudier la fonction $f : x \mapsto x^{1/x} = e^{\ln(x)/x}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2} e^{\ln(x)/x}.$$

On en déduit que $f'(x)$ est du même signe que $1-\ln(x)$ et : $1-\ln(x) \geq 0 \iff x \leq e$.
On en déduit le tableau de variation suivant :

CORRIGÉS

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$\|\|$	$\nearrow$	$\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-1}}$	$\searrow$	

La fonction f admet donc un maximum en $x = \mathrm{e} \in [2,3]$, ce qui signifie que la valeur maximale de $\sqrt[n]{n}$ est atteinte pour $n = 2$ ou $n = 3$.
On doit donc comparer $\sqrt{2}$ et $\sqrt[3]{3}$.
On sait que $2 < \dfrac{9}{4}$, par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on déduit que $\sqrt{2} < \dfrac{3}{2}$ et $\sqrt{2}^3 = 2\sqrt{2} < 3$.
La stricte croissance de la fonction cube sur $\mathbb{R}$, nous assure que : $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$. La valeur maximale de $\sqrt[n]{n}$ est donc $\sqrt[3]{3}$.

EXERCICE B

1. $f(x)$ existe si et seulement si $\mathrm{ch}(x) \neq 0$, ce qui est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$. Elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)^2}.$$

Un carré étant toujours positif, $f'(x)$ est du signe de $-\mathrm{sh}(x)$. Notons de plus que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \text{ et } f(0) = 1.$$

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

2. La fonction f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
De plus $f(\mathbb{R}_+) =]0,1]$. D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]0,1]$.
3. La fonction réciproque f^{-1} a les mêmes variations sur son domaine de définition que la fonction f sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit qu'elle est strictement décroissante sur $]0,1]$. De plus, par symétrie, on a :

$$f^{-1}(1) = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0} f^{-1}(x) = +\infty.$$

4. Voici les courbes représentatives des deux fonctions f et f^{-1} en respectant les informations précédentes et la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$:

PRÉPAS SCIENTIFIQUES

MPSI-MP2I

CONFORME AU PROGRAMME 2021

Maths

L'ouvrage indispensable pour réussir et faire la différence en CPGE scientifiques

→ TOUT LE COURS

Pour maîtriser **l'intégralité du programme** :

- toutes les définitions, théorèmes et propositions indispensables à retenir
- plus de 1 000 démonstrations et exemples concrets à connaître

→ LA SYNTHÈSE DES NOTIONS

Pour retenir **l'essentiel du cours** avant les DS, les colles et dans la perspective des concours

→ LES MÉTHODES PAS À PAS

Pour acquérir **les techniques et astuces** de résolution des exercices

→ ENTRAÎNEMENT INTENSIF

Pour **vous préparer efficacement** et **vous tester** avec + de 800 exercices de difficulté progressive : vrai/faux, application, approfondissement et problèmes type concours

→ TOUS LES CORRIGÉS DÉTAILLÉS

Pour **comprendre** les étapes de résolution et **acquérir** les bons reflexes

OFFERT EN LIGNE

+ **250 flashcards interactives** pour mémoriser autrement
+ **25 synthèses à télécharger** pour des révisions nomades
+ Tous les **scripts Python interactifs** pour s'entraîner à coder

Des auteurs au cœur de l'enseignement et des attentes des élèves en CPGE

Dans la même collection :

Retrouvez notre collection complète ici :

ISBN : 978-2-311-40872-0