

MP
Physique · Modélisation · Chimie
2017

Sous la coordination de

Alexandre HERAULT
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Cachan)

Louis SALKIN
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Cachan)

Par

Olivier FRANTZ
professeur agrégé en école d'ingénieur

Vincent FREULON
professeur en CPGE

Amélie GAY
ENS Lyon

Alexandre HERAULT
professeur en CPGE

Tom MOREL
professeur en CPGE

Jimmy ROUSSEL
professeur agrégé en école d'ingénieur

Pierre TOGNETTI
professeur agrégé

Sommaire thématique de physique

2015 – 2017

e3a PSI Physique-Modélisation	•	•			•		•			••		
e3a PSI Physique et Chimie	••	•		•	•	•		•				
CCP MP Physique				••	•					••	••	•
CCP MP Physique et Chimie	•	••			•		•					
CCP PC Physique	•	•			••		••	••		•	•	••
CCP PC Modélisation Phys-Chimie				•								
CCP PSI Physique et Chimie	•	•		•	••	•	•			••	•	
CCP PSI Modélisation numérique	•	•				•				•		
Centrale MP Physique et Chimie 1		•	•	•	•		••			•		••
Centrale MP Physique et Chimie 2	•			•	•		••			•	••	
Centrale PC Physique 1				•	•			••	•	••	•	
Centrale PC Physique 2	••	•		•	•		•	•	••		••	••
Centrale PSI Physique et Chimie 1	•			••		•	•			•		
Centrale PSI Physique et Chimie 2	••	•			••	•	••	•	•	•	•	
Mines MP Physique 1	•				•		••		•	••		•
Mines MP Physique 2	••		•	••			••			•		•
Mines PC Physique 1	•				•		••	••	•	••		
Mines PC Physique 2	••	•					•	••	••	•		•
Mines PSI Physique 1	•				•		••	••	•	••		
Mines PSI Physique 2	•					•	•	•		•		
X/ENS MP Physique			•				••		•	•	•	
X MP Physique et SI	•						••		•	•	•	•
X PC Physique A	•				•		••	•		••	••	•
X/ENS PC Physique B				•			••	••		••		
	Thermodynamique générale	Phénomènes diffusifs	Physique statistique	Électrostatique et magnétostatique	Électronique	Conversion de puissance	Mécanique du point et du solide	Mécanique des fluides	Ondes mécaniques et sonores	Électromagnétisme	Optique	Physique quantique

Sommaire

		Énoncé	Corrigé
CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES			
Physique	La physique au pays des patients – imagerie par résonance magnétique nucléaire (IRM). <i>électromagnétisme</i>	11	25
Physique et Chimie	Chasse au plomb. <i>mécanique, thermodynamique, diagramme E-pH, solutions aqueuses</i>	43	57

CENTRALE-SUPÉLEC

Physique et Chimie 1	Mouvements dans le champ de pesanteur terrestre. <i>mécanique, physique quantique</i>	74	82
Physique et Chimie 2	Expérimenter avec un morceau de scotch. <i>mécanique, optique ondulatoire, cristallographie, thermodynamique</i>	96	108

MINES-PONTS

Physique 1	Les memristors. <i>électromagnétisme, physique quantique, électrocinétique</i>	132	139
Physique 2	La capacité thermique des gaz. <i>mécanique classique, mécanique quantique, thermodynamique</i>	150	155
Chimie	Autour du silicium. <i>cristallographie, diagrammes E-pH, oxydoréduction, thermodynamique</i>	167	174

POLYTECHNIQUE-ENS

Physique	Mécanismes physiques de la perception auditive. <i>physique statistique, mécanique</i>	181	189
Physique et Sciences de l'Ingénieur	Modélisation et applications d'un transducteur électroacoustique. Étude d'une tour de très grande hauteur. <i>mécanique, optique ondulatoire, asservissements</i>	208	222

FORMULAIRES

Constantes chimiques	248
Constantes physiques	251
Formulaire d'analyse vectorielle	252
Classification périodique	256

Sommaire thématique de chimie

2015 – 2017

e3a PSI Physique et Chimie			•	•			••				
CCP MP Physique et Chimie	••	••	•	•	••	•	••				
CCP PC Chimie	••	•	•	••	•		••	••	••	••	•
CCP PC Modélisation Phys-Chimie											
CCP PSI Physique et Chimie	•	•		••	•	••		•			
Centrale MP Physique et Chimie 1	•										
Centrale MP Physique et Chimie 2	••	•	•	••	•	••	••				
Centrale PC Chimie	•		•	••	••	•	•	•	••	••	••
Centrale PSI Physique et Chimie 1	•	•		•							
Centrale PSI Physique et Chimie 2		•		••	••	•	••				
Mines MP Chimie	••	••		••	••	••	••				
Mines PC Chimie	•	•	••	•	••	•	••		••		
Mines PSI Chimie	••	••		••	••	••	••	•			
X/ENS PC Chimie		•	•	••			••	•	••	•	
	Cristallographie	Solutions aqueuses	Cinétique chimique	Oxydoréduction	Diagrammes E-pH	Courbes courant-potentiel	Thermodynamique	Mélanges binaires	Chimie organique	Orbitales moléculaires	Chimie de coordination

SESSION 2017

MPPH008

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP****PHYSIQUE****Vendredi 5 mai : 8 h - 12 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet est composé de trois parties.

Bien que l'ensemble obéisse à une logique interne, la partie II est indépendante de la partie I et la partie III est indépendante de la partie II.

LA PHYSIQUE AU PAYS DES PATIENTS

Imagerie par Résonance Magnétique nucléaire ou IRM

L’IRM, qui s’utilise dans des conditions quasi-naturelles et même in vivo, est une technique non destructive de visualisation en coupes des tissus organiques mous, en les laissant intacts. Elle utilise un champ magnétique intense permanent $\vec{B}_0$ combiné avec un faible champ perturbateur oscillant. L’interaction de ces champs avec le moment magnétique d’une particule élémentaire (électron ou proton) engendre un comportement dynamique qui fournit des renseignements sur l’environnement atomique de ces particules.

Dans ce sujet, nous étudierons quelques aspects de cette technique sans caractère exhaustif. Les questions ne font appel qu’à des éléments du programme MPSI/MP de physique. Les candidats peuvent à tout moment utiliser un résultat donné par l’énoncé pour répondre aux questions suivantes.

Données	
Constante de Boltzmann :	$k = 1,4 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
Facteur de Boltzmann associé à un système d’énergie E, en équilibre à la température T :	$\exp(-E/kT)$
Nombre d’Avogadro :	$N_A = 6,0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Vitesse de la lumière dans le vide :	$c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
Perméabilité du vide :	$\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$
Constante de Planck « réduite » :	$\hbar = h/(2\pi) = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$
Masse de l’électron :	$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Charge de l’électron :	$-e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Rayon de l’orbite 1s du modèle de Bohr :	$r_B = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$
Moment magnétique du proton :	$\mu_p = 1,4 \cdot 10^{-26} \text{ J.T}^{-1}$
Conductivité du cuivre :	$\sigma = 6,0 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$
Développement limité de la fonction exponentielle autour de $x = 0$:	$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$

Précession : la précession est le nom donné au changement graduel d’orientation d’un vecteur qui décrit un cône dont l’axe est la direction de précession. Ce cône est parcouru à vitesse constante dans un sens donné.

Partie I – Comportement d’une population de dipôles dans un champ magnétique

I.1- Dipôles magnétiques

- Q1.** Définir le vecteur moment magnétique $\vec{\mu}$ associé à une boucle circulaire de courant de rayon R et d’axe de révolution Oz , parcourue par une intensité I , dans le cadre de l’approximation dipolaire (**figure 1**). On note $\vec{e}_z$ le vecteur unitaire de l’axe Oz . Le sens de rotation directe autour de l’axe Oz est le sens d’orientation de l’intensité algébrique.
- Q2.** Expliquer pourquoi une sphère chargée, en rotation autour d’un axe passant par son centre, est elle-aussi caractérisée par un moment magnétique dont on précisera la direction et le sens (on ne demande pas le calcul du moment mais seulement la justification de son existence).

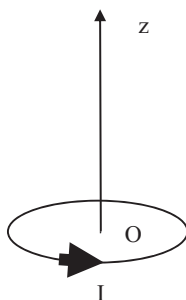


Figure 1 – Boucle de courant

Dans le cas du proton (noyau d’hydrogène) qui tourne sur lui-même (rotation propre de vecteur de rotation $\vec{\Omega}$ autour d’un axe Oz), on peut lui associer un moment magnétique $\vec{\mu}_p$ colinéaire à $\vec{\Omega}$ et de norme μ_p .

- Q3.** Justifier par analyse dimensionnelle l’unité écrite dans le tableau de données.

Soit un dipôle magnétique de moment $\vec{\mu}$ placé en O dans un champ magnétique extérieur uniforme permanent $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$. On rappelle les expressions de l’énergie potentielle $E_{\text{pot}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_0$ et du couple (moment de force) d’interaction $\vec{\Gamma}(O) = \vec{\mu} \wedge \vec{B}_0$.

- Q4.** En déduire quelles sont les 2 positions d’équilibre d’un moment dipolaire magnétique, dans un champ magnétique extérieur uniforme $\vec{B}_0$, en précisant les valeurs associées de l’énergie potentielle.
- Q5.** Évaluer la différence d’énergie en eV entre les deux configurations d’équilibre d’un noyau d’hydrogène soumis à un champ magnétique permanent de 1 tesla (ordre de grandeur typique en RMN).
- Q6.** Comparer cette valeur à celle de l’énergie thermique à 37 °C.
- Q7.** L’ordre de grandeur de l’énergie de liaison covalente de OH dans l’eau est de 5 eV et celui d’une énergie d’ionisation est de 13,6 eV. Justifier l’utilisation de la RMN en imagerie médicale, en considérant que la méthode fait passer le proton d’un état d’équilibre à l’autre.

Nous considérons qu’une population de dipôles, placés dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}_0$ de 1 tesla, en équilibre thermique à la température T , obéit à la statistique de Boltzmann.

- Q8.** Rappeler, à un facteur multiplicatif près, l’expression de la probabilité d’occuper un état d’énergie E par un dipôle.

CCP Physique MP 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Amélie Gay (ENS Lyon) ; il a été relu par Tom Morel (professeur en CPGE) et Louis Salkin (professeur en CPGE).

Ce problème porte sur le fonctionnement de la résonance magnétique nucléaire (RMN). Les trois parties peuvent être traitées de façon relativement indépendante.

- La première partie s'intéresse au comportement d'une population de dipôles dans un champ magnétique permanent. On étudie d'abord le mouvement de précession d'un dipôle unique avant de généraliser ce résultat à un ensemble de dipôles au moyen du vecteur aimantation. Cette partie fait appel à des notions de cours sur les champs magnétiques et sur la thermodynamique statistique.
- La deuxième partie porte en premier lieu sur la création de champs magnétiques tournants au moyen de solénoïdes. Cette étude nécessite d'être à l'aise avec la magnétostatique. Dans un second temps, on étudie la création d'un champ magnétique permanent intense grâce à un milieu supraconducteur. On résout cette partie par analogie avec ce qui a été fait dans le cours sur la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu conducteur.
- La dernière partie propose une approche de la RMN pulsée avec l'étude de l'aimantation dans un référentiel tournant. Les méthodes de changement de référentiel vues dans le cours de mécanique en référentiel non galiléen sont utiles pour aborder cette partie qui laisse plus de place aux raisonnements physiques.

Ce sujet présente une difficulté croissante : il commence par des questions proches du cours pour laisser progressivement place aux raisonnements physiques. Il donne l'occasion de réviser quasiment tout le programme d'électromagnétisme.

INDICATIONS

Partie I

- 2 Une charge en mouvement crée un courant.
- 4 Définir un angle θ entre $\vec{\mu}$ et $\vec{B}_0$.
- 13 Revenir à la définition de l'intensité dans un circuit.
- 17 Utiliser la formule de Planck-Einstein.
- 20 Dériver $\|\vec{\mu}\|^2$ par rapport au temps. Projeter l'équation différentielle sur (Oz) .
- 21 Montrer que l'angle entre $\vec{B}_0$ et $\vec{\mu}$ se conserve.
- 23 Utiliser la question 10.
- 26 Effectuer une analyse dimensionnelle.
- 28 Regarder dans quelle direction l'aimantation rayonne de manière optimale.

Partie II

- 33 Utiliser le théorème d'Ampère sur un contour situé à l'intérieur et sur un contour situé à l'extérieur du solénoïde.
- 36 Décomposer $\vec{B}_1'$ sous la forme

$$\vec{B}_1' = B_1 (\cos \omega t \vec{e}_x - \sin \omega t \vec{e}_y) + B_1 (\cos \omega t \vec{e}_x + \sin \omega t \vec{e}_y)$$
- 37 La densité volumique de courant est supposée uniforme sur une section de spire.
- 41 Le raisonnement est analogue à celui permettant d'établir l'équation différentielle régissant le champ électrique dans un milieu conducteur.
- 44 Le champ magnétique ne diverge pas lorsque $x \rightarrow -\infty$; de plus, comme il n'y a pas de courant surfacique, il est continu en $x = 0$.

Partie III

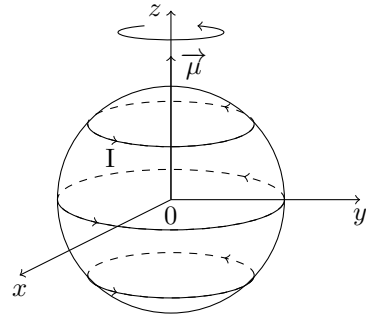
- 49 Appliquer la formule de dérivation à $\vec{B}_1$.
- 53 $\vec{B}_{\text{eff}}$ est fixe dans le référentiel R_1 .
- 56 Comparer la vitesse angulaire de $\vec{B}_1$ à la vitesse de précession de $\vec{M}$.
- 61 Utiliser la question 55.
- 65 L'aimantation ne possède qu'une composante transverse après un pulse à 90° .
- 67 Observer l'influence de la relaxation.
- 71 Donner la composante de l'aimantation qui crée un champ suivant $\vec{e}_y$ et utiliser la question 70.

I. COMPORTEMENT D'UNE POPULATION DE DIPÔLES DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE

1 Le moment magnétique d'une spire de courant plane délimitant une surface S et parcourue par un courant I est défini par $\vec{\mu} = IS \vec{n}$, où $\vec{n}$ désigne le vecteur unitaire normal au plan de la spire et dont le sens est donné par celui choisi pour le parcours de l'intensité (règle du tire-bouchon). Avec les données du problème,

$$\vec{\mu} = \pi R^2 I \vec{e}_z$$

2 Le mouvement d'une charge en rotation autour d'un axe crée une boucle circulaire de courant. Une sphère chargée en rotation autour d'un axe passant par son centre peut alors être considérée comme **un empilement de spires de courant**. D'après la question 1, la sphère est donc caractérisée par un moment magnétique qui est la somme des moments magnétiques associés à chaque spire. **Il est dirigé suivant l'axe de rotation de la sphère. Son sens dépend de la charge et du sens de rotation de la sphère.**



3 Cherchons l'équivalence en unités internationales de l'unité $J \cdot T^{-1}$. Comme l'énergie cinétique s'écrit $E = m v^2 / 2$,

$$J = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$

De plus la force de Laplace $\vec{F} = \int_C I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ permet d'écrire

$$T = \text{kg} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

Ainsi

$$J \cdot T^{-1} = \text{A} \cdot \text{m}^2$$

L'unité est donc cohérente avec celle de la question 1.

4 Les positions d'équilibre satisfont à l'équation

$$\vec{\text{grad}} E_{\text{pot}} = \vec{0}$$

Notons θ l'angle entre le champ magnétique extérieur $\vec{B}_0$ et le moment magnétique $\vec{\mu}$,

$$E_{\text{pot}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_0 = -\mu B_0 \cos \theta$$

et

$$\frac{dE_{\text{pot}}}{d\theta} = \mu B_0 \sin \theta$$

On obtient alors les positions d'équilibre pour

$$\theta = 0 \quad \text{et} \quad \theta = \pi$$

Le moment magnétique est en équilibre lorsqu'il est aligné avec le champ magnétique extérieur de manière parallèle ou antiparallèle. Les valeurs d'énergie potentielle correspondantes sont

$$E_{\text{pot,min}} = -\mu B_0 \quad \text{et} \quad E_{\text{pot,max}} = \mu B_0$$

La position $\theta = 0$ possède la plus petite énergie potentielle, c'est un équilibre stable. L'autre position d'équilibre est instable.

5 D'après la question 4, la différence d'énergie entre les deux positions d'équilibre s'écrit

$$\Delta E_{\text{pot}} = 2 \mu_p B_0 = 2,8 \cdot 10^{-26} \text{ J} = 1,7 \cdot 10^{-7} \text{ eV}$$

1 eV correspond à l'énergie électrostatique ($E_{\text{el}} = qV$) gagnée lorsqu'une unité de charge électrique e est déplacée entre deux points dont le potentiel électrostatique diffère d'un volt.

6 Numériquement, $E_{\text{th}} = kT = 2,7 \cdot 10^{-2} \text{ eV}$

Par conséquent,

$$E_{\text{th}} \gg \Delta E_{\text{pot}}$$

L'énergie thermique suffit à faire passer le moment magnétique d'un noyau d'hydrogène d'un état d'équilibre à un autre.

7 Comme $E_{\text{covalente}} \gg \Delta E_{\text{pot}}$ et $E_{\text{ionisation}} \gg \Delta E_{\text{pot}}$, l'énergie apportée au système par l'intermédiaire du champ magnétique extérieur ne risque pas d'endommager les liaisons chimiques ni d'ioniser les molécules. La méthode apparaît alors **sans risque pour le corps humain**.

8 Dans le cadre de la statistique de Boltzmann, la probabilité d'occuper un état d'énergie E s'écrit

$$p(E) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right)$$

avec Z un facteur de normalisation.

9 Écrivons les lois régissant les deux populations N_+ et N_- . Elles sont directement proportionnelles à la loi de probabilité définie à la question 8 :

$$N_+ \propto \exp\left(-\frac{E_{\text{pot,max}}}{kT}\right) = \exp\left(-\frac{\mu_p B_0}{kT}\right)$$

$$N_- \propto \exp\left(-\frac{E_{\text{pot,min}}}{kT}\right) = \exp\left(\frac{\mu_p B_0}{kT}\right)$$

Finalement

$$\frac{N_+}{N_-} = \exp\left(-\frac{2\mu_p B_0}{kT}\right)$$

D'après la question 6, $\mu_p B_0 \ll kT$. On peut alors effectuer un développement limité de l'exponentielle à l'ordre 1 en $\mu_p B_0/kT$:

$$\frac{N_+}{N_-} \simeq 1 - \frac{2\mu_p B_0}{kT}$$

CCP Physique et Chimie MP 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Olivier Frantz (professeur agrégé en école d'ingénieurs) et Alexandre Herault (professeur en CPGE) ; il a été relu par Jérôme Lambert (enseignant-chercheur à l'université), Julien Dumont (professeur en CPGE) et Jean-Julien Fleck (professeur en CPGE).

Ce sujet a pour thème général le plomb à travers son utilisation dans le domaine de la chasse.

- La première partie propose d'étudier la trajectoire de la gerbe de plomb d'une cartouche de chasse. On propose deux approches d'analyse du mouvement, l'une très simpliste, l'autre inspirée par d'anciens travaux de balistique. Ces deux démarches permettent d'effectuer des prédictions qui sont systématiquement confrontées aux données du document fourni en appui du sujet. Cette partie est plutôt abordable. Les notions de mécanique abordées sont rudimentaires. Il convenait d'aller assez vite et d'effectuer rapidement toutes les applications numériques.
- La deuxième partie étudie l'obtention du plomb métallique à partir du minerai de sulfure de plomb (galène). Cette opération est réalisée industriellement en deux étapes classiques en pyrométallurgie : le grillage, qui consiste à transformer le sulfure en oxyde, puis la réduction de l'oxyde en plomb métallique. Ce sont les outils de la thermodynamique chimique sur les équilibres qui sont mis à profit. On calcule également une température de flamme.
- La troisième partie est très courte, seulement trois questions ; elle aborde la toxicité du plomb à travers l'étude de son diagramme potentiel-pH et de la solubilité totale du plomb en solution aqueuse.
- Enfin, la quatrième et dernière partie s'intéresse à l'obtention de la grenaille de plomb (plomb solide sous forme de petites billes) lors de la cristallisation du plomb liquide. Cette cristallisation se produit pendant une surfusion (le plomb reste liquide au-dessous de la température de fusion), à l'aide de germes solides qui permettent de l'amorcer. L'étude est faite à partir de l'enthalpie libre d'un système sphérique avec un cœur solide et une couche périphérique liquide. L'expression de G est donnée et l'on s'attache essentiellement à étudier son évolution en fonction de la croissance du noyau interne solide.

Cette épreuve mixte de physique et de chimie était bien construite et demandait aux candidats de conduire des raisonnements physiques et chimiques sur un même thème global. Elle couvrait de larges parts du programme, ce qui en fait un bon outil d'entraînement.

INDICATIONS

Partie I

- 1 Faire le bilan des forces sur un projectile et appliquer la relation fondamentale de la dynamique.
- 2 Comparer les normes des forces de pesanteur et de frottement.
- 5 Combiner les équations paramétriques pour éliminer la variable temps t .
- 6 Annuler z dans l'équation de la trajectoire pour obtenir la portée. On atteint la hauteur maximale lorsque la vitesse selon z s'annule.
- 11 Pour un mouvement rectiligne, on peut séparer les variables selon

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dX'} \frac{dX'}{dt}$$

Le signe de D doit être positif pour garder une cohérence avec la suite de l'énoncé.

- 13 La solution de l'équation différentielle $y'(x) + \alpha y(x) = 0$ est $y(x) = y_0 e^{-\alpha x}$.
- 14 Erreur d'énoncé : d est calculée pour v_∞ et non pour $10v_\infty$.
- 16 Combien de plombs faut-il pour atteindre l'énergie cinétique létale ?
- 19 Lorsque la vitesse limite est atteinte, la somme des forces est nulle.

Partie II

- 24 Combiner la réaction (1) avec la fusion de PbO . Utiliser le fait que $\Delta_{\text{fus}}G^\circ$ est nul à la température de fusion pour évaluer l'entropie standard de fusion.
- 25 Relier le signe de l'entropie standard de réaction à l'évolution du « désordre ».
- 26 Utiliser la loi de Van't Hoff.
- 29 Relier les pressions partielles aux fractions molaires et à la pression totale.
- 30 Quelle est l'influence de la pression sur le quotient réactionnel ?
- 31 Quelle est l'influence de la quantité totale de gaz (donc de la présence de diazote) sur le quotient réactionnel ?
- 32 La transformation est isenthalpique. Décomposer le chemin en deux étapes : la réaction à T et P constantes, puis l'élévation de température.

Partie III

- 34 Il y a une erreur sur la formule d'une espèce dans le diagramme : il faut lire HPbO_2^- au lieu de HPbO . Deux espèces réagissent lorsque leurs domaines sont disjoints.
- 36 Écrire la relation de Guldberg et Waage à l'équilibre pour les deux réactions de solubilisation. La solubilité du plomb est la somme de deux concentrations.

Partie IV

- 41 Utiliser de nouveau $\Delta_{\text{fus}}G^\circ(T_{\text{fus}}) = 0$.
- 43 Simplifier l'expression de $G(r)$ lorsque $T = T_{\text{fus}}$ en utilisant le résultat de la question 41.
- 44 Remarquer que $g_s^\circ - g_\ell^\circ < 0$ sur la gamme de température considérée et étudier le signe de la dérivée de $G(r)$.
- 45 La germination doit être favorable énergétiquement, c'est-à-dire que l'on doit avoir $dG < 0$ lors de la croissance de r .
- 46 Le rayon critique n'est pas défini à la température de fusion.
- 47 $G(0)$ est un minimum local de G .
- 48 La remontée de la température au cours de la solidification est due au fait que la cristallisation est un phénomène exothermique.

I. TRAJECTOIRE DES PLOMBS D'UNE CARTOUCHE

1 Le projectile est soumis à deux forces : son poids et la force de frottement fluide exercée par l'air. Par conséquent, le principe fondamental de la dynamique appliqué au projectile s'écrit dans le référentiel terrestre, supposé galiléen d'après l'énoncé,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{g} - \frac{1}{2} \rho_a S C_D v \vec{v}$$

Il est légitime de négliger la poussée d'Archimède comme le propose l'énoncé car cette force est à peu près 10 000 fois inférieure au poids, du fait de la faible masse volumique de l'air par rapport à celle du plomb :

$$\Pi = \rho_a V g \ll P = m g = \rho V g$$

2 Dans le modèle gravitaire, on néglige la force de frottement devant la force de pesanteur, ce qui conduit à écrire, en norme,

$$\frac{1}{2} \rho_a \pi R^2 C_D v^2 \ll m g$$

soit en particulier

$$v_0 \ll v_\infty = \sqrt{\frac{2 m g}{\rho_a \pi R^2 C_D}}$$

Ce modèle n'est donc pas valable lorsque la vitesse devient trop importante.

3 D'après les conditions initiales et les expressions des forces, le problème est limité à deux dimensions et le mouvement a lieu dans le plan (xOz) . Dans une base cartésienne, la vitesse s'écrit

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_z \vec{j}$$

Attention, l'énoncé fait le choix inhabituel de désigner par $\vec{j}$ le vecteur de base associé à l'axe (Oz) .

Projetons l'équation du mouvement obtenue à la question 1 sur chacun des vecteurs de base. Puisque le frottement est négligeable, il vient

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt}(t) = 0 \\ \frac{dv_z}{dt}(t) = -g \end{cases}$$

4 On connaît la vitesse du projectile à $t = 0$:

$$\begin{cases} v_x(0) = v_0 \cos \theta_0 \\ v_z(0) = v_0 \sin \theta_0 \end{cases}$$

On intègre alors l'équation obtenue à la question 3 pour obtenir l'équation paramétrique de la vitesse :

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos \theta_0 \\ v_z(t) = -g t + v_0 \sin \theta_0 \end{cases}$$

Centrale Physique et Chimie 1 MP 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tom Morel (professeur en CPGE) ; il a été relu par Louis Salkin (professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

Ce sujet s'intéresse à la chute des corps dans le champ de pesanteur terrestre, d'un point de vue classique puis quantique. Il est composé de deux parties indépendantes très inégales.

- Dans la première partie, très courte, on utilise le théorème de Gauss pour déterminer l'expression du champ de pesanteur dans le cas d'une distribution de masse sphérique. Ensuite, on étudie la chute de Felix Baumgartner (2012). Compte tenu de l'altitude de départ (presque 39 km), il est légitime d'aborder une première phase de mouvement sans frottement. La prise en compte des frottements de l'air, qui peuvent devenir prépondérants, permet d'expliquer les différentes mesures effectuées lors de ce saut hors norme. Les dernières questions sont relativement ouvertes, conformément à l'esprit des nouveaux programmes.
- Dans la seconde partie, on s'intéresse à la chute quantique d'un neutron. Dans un premier temps, on introduit les notions de quantum de longueur et d'énergie. Ensuite, on détermine les états stationnaires du neutron dans le champ de pesanteur par résolution de l'équation de Schrödinger. On termine cette partie en étudiant le dispositif *qBounce* de mesure des niveaux d'énergie du neutron. Même si elle comporte quelques questions relativement ouvertes, cette partie repose essentiellement sur le cours de mécanique quantique de seconde année, notamment sur la résolution de l'équation de Schrödinger.

Intéressant et bien construit, ce sujet fait appel à de nombreuses connaissances relatives à la mécanique de première année et à la physique quantique. Au vu des épreuves de l'année précédente, il faut s'attendre à d'autres sujets de mécanique quantique dans les années à venir.

INDICATIONS

Partie I

- I.B.2 Décomposer le mouvement en deux étapes : tout d'abord l'objet n'est soumis qu'à son poids et sa vitesse augmente jusqu'à la vitesse du son en $z = z_{\max}$. Ensuite, le système subit aussi la force de frottement qui va le freiner.

Partie II

- II.A.3 Déterminer l'expression de la durée dt entre les deux positions z et $z + dz$. Par ailleurs, normaliser la loi de probabilité permet de trouver la constante de proportionnalité entre dP_{cl} et dt .
- II.A.7 L'énergie du neutron doit être du même ordre de grandeur que le quantum d'énergie potentielle.
- II.B Représenter l'orbite de phase avec une énergie potentielle mgz . L'aire sous la courbe est délimitée par $z = 0$ et $z = H$.
- II.C.4 Montrer que les niveaux d'énergie ε_n coïncident avec les zéros de la fonction d'Airy.
- II.C.5 La densité de probabilité de présence s'écrit $|\varphi(z)|^2$.
- II.D.2.a Écrire la conservation de l'énergie mécanique pour trouver la relation entre la vitesse v_z et H_n .
- II.D.2.e La probabilité d'absorption entre chaque rebond vaut T_1 .
- II.D.2.f Sur une distance x , la particule a effectué x/L_1 rebonds.
- II.D.3.b Ne pas oublier que la fonction d'onde $\varphi_i(z)$ vérifie l'équation de Schrödinger stationnaire d'énergie E_i . En outre, multiplier chaque membre de l'équation par φ_1 , puis intégrer entre $z = 0$ et $z = +\infty$ pour déterminer la première équation différentielle.
- II.D.3.d $|c_i|^2$ est lié à la probabilité de trouver la particule dans l'état d'énergie E_i .
- II.D.3.f Relier la fréquence d'absorption à la fréquence du photon émis lorsque la particule passe de l'état d'énergie E_3 à celui d'énergie E_1 .
- II.D.3.h Pour un mouvement sinusoïdal d'amplitude $X_{\max}$ et de pulsation Ω , l'amplitude de l'accélération s'écrit

$$a_0 = \Omega^2 X_{\max}$$

- II.D.3.i Utiliser la relation entre le temps de passage Δt et la largeur du premier pic d'absorption Δf :

$$\Delta f \Delta t \simeq 1$$

I. UN SAUT SUPERSONIQUE

I.A.1 Le théorème de Gauss gravitationnel est le suivant :

Le flux sortant du champ de gravitation à travers une surface fermée S est proportionnel à la masse intérieure M_{int} à cette surface, d'où

$$\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi \mathcal{G} M_{\text{int}}$$

I.A.2 Tout plan contenant le vecteur $\vec{e}_r$ et passant par M est un plan de symétrie de la distribution de masse, donc $\vec{g}$ est selon $\vec{e}_r$. Par ailleurs, la distribution de la masse est invariante par rotation selon θ et φ , d'où

$$\vec{g} = g(r) \vec{e}_r$$

Choisissons comme surface de Gauss une sphère de rayon r . Pour $r \geq R_T$, $M_{\text{int}} = M_T$. Par conséquent, le théorème de Gauss devient

$$4\pi r^2 g(r) = -4\pi \mathcal{G} M_T$$

Ainsi

$$\vec{g}(r \geq R_T) = -\frac{\mathcal{G} M_T}{r^2} \vec{e}_r$$

Pour $r \leq R_T$,

$$M_{\text{int}} = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho = \frac{M_T r^3}{R_T^3}$$

Par le théorème de Gauss,

$$\vec{g}(r \leq R_T) = -\frac{\mathcal{G} M_T r}{R_T^3} \vec{e}_r$$

On vérifie que les deux expressions coïncident en $r = R_T$. Cette continuité du champ est due à la modélisation volumique de la distribution de masse.

I.A.3 Utilisons l'expression du champ gravitationnel en $r = R_T$:

$$g = \frac{\mathcal{G} M_T}{R_T^2}$$

Par conséquent,

$$M_T = \frac{g R_T^2}{\mathcal{G}} = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

On rappelle les limites de ce modèle : la Terre n'est pas parfaitement immobile du fait de sa rotation propre, et n'est pas parfaitement sphérique mais aplatie aux pôles. Ces modifications entraînent de légères corrections dans l'expression du champ de pesanteur.

I.B.1 En l'absence de frottement, la conservation de l'énergie mécanique du sauteur entre les instants $t = 0$ (où $z = h_{\text{min}}$ et $v = 0$) et $t = t_f$ (où $z = 0$ et $v = c_{\text{son}}$) s'écrit

$$mgh_{\text{min}} = \frac{1}{2} m c_{\text{son}}^2$$

Ainsi

$$h_{\text{min}} = \frac{c_{\text{son}}^2}{2g} = 5,89 \text{ km}$$

I.B.2 Supposons l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$ uniforme. De plus, on considère l'atmosphère isotherme, de température $T = 300$ K. En présence de la force de frottement $\vec{F}_D$, le principe fondamental de la dynamique appliqué au sauteur dans le référentiel terrestre supposé galiléen s'écrit

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -mg \vec{e}_z + \vec{F}_D$$

La vitesse est maximale lorsque

$$mg = KA \rho(z_{\max}) v^2$$

Posons $H = RT/M_a g$ tel que $\rho(z) = \rho_0 e^{-z/H}$. Cherchons l'altitude $z_{\max}$ telle que $v = c_{\text{son}}$. Il vient

$$\frac{mg}{KA c_{\text{son}}^2} = \rho_0 e^{-z_{\max}/H}$$

L'énoncé fournit la vitesse terminale $v_t = 79,4 \text{ m.s}^{-1}$. Cette vitesse reste constante a priori jusqu'à l'ouverture du parachute. Prenons pour simplifier $z = 0$.

| Cette approximation est vérifiée à la fin de la question.

$$mg = KA \rho_0 v_t^2$$

L'équation en $z = z_{\max}$ peut alors s'écrire

$$e^{z_{\max}/H} = \left(\frac{c_{\text{son}}}{v_t} \right)^2$$

Pour $T = 300$ K, on trouve $H = 8,79$ km, d'où

$$z_{\max} = 2H \ln \left(\frac{c_{\text{son}}}{v_t} \right) = 25,6 \text{ km}$$

| La valeur de la constante des gaz parfaits R donnée dans l'énoncé est erronée. En effet, $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$. Mais cette coquille affecte peu les résultats.

Il reste à déterminer l'altitude initiale h qui permet d'atteindre $z = z_{\max}$ avec une vitesse $v = c_{\text{son}}$. Décomposons la chute en deux temps : la chute libre jusqu'à $z = z_{\max}$ puis le système, toujours soumis à son poids, est maintenant soumis à la force de frottement. Pendant la première phase, le système chute de $z = h$ à $z = z_{\max}$ et sa vitesse varie de 0 à c_{son} . D'après la question précédente,

$$mgh = mgz_{\max} + \frac{1}{2} m c_{\text{son}}^2$$

d'où

$$c_{\text{son}} = \sqrt{2g(h - z_{\max})}$$

Ainsi

$$h = z_{\max} + \frac{c_{\text{son}}^2}{2g} = 31,5 \text{ km}$$

Faisons quelques remarques :

- la valeur obtenue est du même ordre de grandeur que la hauteur réelle ;
- l'hypothèse de l'atmosphère isotherme peut être remise en cause car à ces altitudes, la température est loin d'être égale à 300 K ;
- la hauteur calculée est sous-estimée. En effet, on a choisi une vitesse terminale en $z = 0$. En réalité, cette vitesse est obtenue à une altitude plus élevée, au moment où Felix Baumgartner ouvre son parachute. D'après le document, la hauteur d'ouverture du parachute est de l'ordre de 2,5 km.

Centrale Physique et Chimie 2 MP 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jérôme Lambert (enseignant-chercheur à l'université) et Fabrice Maquère (professeur agrégé) ; il a été relu par Olivier Frantz (professeur agrégé en école d'ingénieurs), Louis Salkin (professeur en CPGE) et Alexandre Herault (professeur en CPGE).

Ce sujet est consacré à l'étude de différentes propriétés d'un ruban adhésif. Les quatre parties qui le constituent abordent des sujets très variés et sont totalement indépendantes.

- La première partie présente un essai de « pelage », consistant à mesurer la force à appliquer à un ruban de scotch afin de le décoller de son support. Cet essai donne lieu à un phénomène de *stick-slip*, se prêtant à une analyse en étapes successives.
- Le traitement chimique du support préalablement à l'essai de pelage est abordé dans la deuxième partie. L'attaque acide des métaux donne l'occasion de mettre à profit les notions d'acide fort et d'oxydoréduction. On étudie ensuite la synthèse du trioxyde de soufre à partir du dioxyde de soufre ; on cherche à déterminer les conditions visant à optimiser ce procédé industriel.
- La troisième partie est consacrée à l'étude de la biréfringence d'une bande de scotch. Elle fait appel à l'optique ondulatoire et à la notion de polarisation.
- Enfin, la quatrième partie s'appuie sur le procédé d'exfoliation « au scotch » mis au point en 2004 : cette technique permet d'obtenir une unique feuille de graphène en décollant un ruban adhésif d'un morceau de carbone graphite. Cette partie utilise les notions fondamentales de cristallographie et s'intéresse plus particulièrement aux différentes formes cristallines du carbone : diamant, graphite et graphène.

La première partie comporte quelques questions difficiles. La troisième partie s'appuie sur un document pour étudier des problèmes expérimentaux intéressants. Il n'y a pas de difficulté majeure dans les parties II et IV, que ce soit dans les notions abordées ou dans les questions ouvertes nécessitant un peu d'autonomie dans l'élaboration d'une réponse. Ce problème est long mais très intéressant. Il est l'occasion de réviser le programme de sup aussi bien que le programme de spé.

INDICATIONS

Partie I

- I.A.2.c Exploiter le fait que la force de Van der Waals est à courte portée.
- I.A.3.a La relation de Chasles est bien utile.
- I.A.4.c Quel est l'angle à adopter pour minimiser les risques de rupture du ruban ?
- I.B.4 Isoler les termes linéaires en x_L ou ses dérivées.
- I.B.5 Introduire t' dans l'équation du mouvement permet d'opérer une identification rapide des coefficients.
- I.B.6.a Pour déterminer le sens de rotation, on peut s'interroger sur le signe de la dérivée des grandeurs en abscisse et en ordonnée.
- I.B.6.b Que devient la force de frottement lorsque v_L s'annule ? Lire le signe de $\ell(t) - \ell_0$ sur les portraits de phase et montrer que x_L ne décroît pas.

Partie II

- II.A.2 Raisonner sur les espèces réelles en solution.
- II.B.1 Attention à ne pas extrapoler les données au-delà des intervalles étudiés.
- II.B.3.a Appliquer la relation de Guldberg et Waage, en fonction des pressions partielles puis des quantités de matière des espèces chimiques.
- II.B.3.b Discuter de l'influence de la pression partielle en dioxygène.
- II.B.4.a Exprimer le quotient de réaction en fonction des pressions partielles, puis en fonction des quantités de matière des espèces chimiques dont la plupart n'ont pas évoluées au moment de l'ajout de diazote.
- II.B.4.b Comparer le quotient Q à la constante K et en déduire le sens d'évolution.

Partie III

- III.A.6 Si l'on éclaire le montage en lumière blanche, toutes les longueurs d'ondes sont-elles transmises ? Par quel moyen peut-on analyser le spectre de la lumière issue du dispositif ?
- III.C.1.b Que se passe-t-il lorsque les directions des lignes neutres sont parallèles aux axes passants des polariseurs ?
- III.C.2.b Comment peut-on s'affranchir de l'erreur systématique que l'on commet en ne se plaçant pas exactement à l'incidence normale ?
- III.C.3.c Du fait du mécanisme d'extinction des longueurs d'onde (loi de Malus), est-ce que les « raies » d'absorption sont fines ? Qu'en déduire sur l'incertitude expérimentale sur les longueurs d'onde d'absorption ? Il faut tenir compte de la marge que nous donne cette incertitude lorsqu'on confronte le modèle aux résultats expérimentaux.
- III.C.4.b Que signifie le terme de « contraste » lorsqu'on observe des couleurs ?

Partie IV

- IV.A.3 C'est une question de cinétique.
- IV.B.2 La tangence entre atomes se fait au sein des sites tétraédriques, entre le centre du site et le sommet de la maille adjacent.
- IV.C.2 Après avoir annoté le schéma, exprimer la masse volumique de la maille de graphite en fonction des 2 paramètres de maille puis en fonction de la distance inter-feuillet et de la longueur de la liaison entre 2 atomes de carbone (au sein d'un feuillet).

I. PELAGE D'UN RUBAN ADHÉSIF COLLÉ SUR UN SUBSTRAT PLAN

I.A.1 Un autre type de liaison chimique est la liaison covalente où deux atomes partagent deux électrons. L'énergie caractéristique de ce type de liaison est de l'ordre de 5 eV tandis que l'énergie caractéristique d'une liaison de type van der Waals est de l'ordre de 10 meV.

Il était aussi possible de citer la liaison hydrogène dont l'énergie est de l'ordre de 0,1 eV et donc supérieure à l'énergie de liaison de van der Waals.

I.A.2.a Le potentiel de Lennard-Jones est construit à partir de deux termes :

- Le terme α/r^{12} , qui engendre la force

$$F_{12} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\alpha}{r^{12}} \right) = \frac{12\alpha}{r^{13}}$$

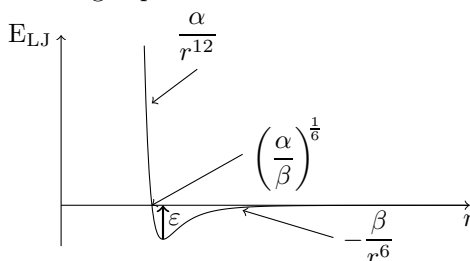
suivant la direction définie par $\vec{e}_r$. Cette force est positive et traduit le caractère **répulsif** de l'interaction lorsque le terme en $1/r^{12}$ l'emporte sur le terme en $1/r^6$, c'est-à-dire à courte portée.

- Le terme $-\beta/r^6$ correspond à la force

$$F_6 = -\frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{\beta}{r^6} \right) = -\frac{6\beta}{r^7}$$

Cette force est **attractive** et domine à longue portée.

I.A.2.b On obtient l'allure du potentiel de Lennard-Jones à partir de son comportement asymptotique pour $r \rightarrow 0$ et $r \rightarrow \infty$. La figure ci-contre montre que le potentiel possède un minimum en r_0 correspondant à une énergie potentielle $-\varepsilon$. L'énergie de la liaison entre deux molécules est alors ε .



Déterminons l'expression de r_0 correspondant à la position d'équilibre. Dans ce cas, la somme des forces engendrées par chacun des deux termes du potentiel est nulle :

$$\frac{12\alpha}{r_0^{13}} - \frac{6\beta}{r_0^7} = 0$$

soit
$$r_0 = \left(\frac{2\alpha}{\beta} \right)^{\frac{1}{6}}$$

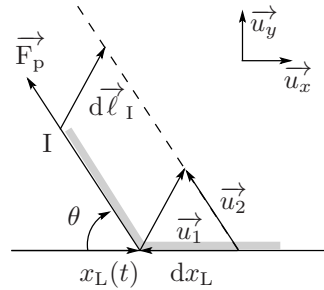
I.A.2.c Le potentiel de Lennard-Jones varie en $1/r^6$ lorsque $r \rightarrow \infty$. Cette fonction tend rapidement vers 0, ce qui implique que la force de van der Waals dérivant de ce potentiel a une courte portée dont une valeur approchée est r_0 : seules les molécules voisines d'une molécule interagissent avec celle-ci. Le potentiel de Lennard-Jones est répulsif à courte portée, ce qui implique que chaque molécule occupe un volume donné de l'ordre de r_0^3 . On en déduit que l'on peut voir le scotch comme un empilement

dense de sphères interagissant avec leurs voisines directes. Lors de l'arrachement, seule l'énergie des molécules de la surface créée est modifiée d'une quantité ΔE . Ces molécules occupent chacune une surface de l'ordre de πr_0^2 , si bien que le travail à fournir pour créer une surface A est

$$W_{\text{adh}} = \Delta E \times (\text{nombre de molécules sur A}) = \Delta E \times \left(\frac{A}{\pi r_0^2} \right)$$

De fait, le travail à fournir pour créer la surface A est proportionnel à A.

I.A.3.a Calculons le déplacement élémentaire de I à l'aide de la relation de Chasles en nous appuyant sur le dessin ci-contre. Avant son décollement, le segment qui va se décoller est porté par le vecteur $\vec{u}_1 = -dx_L \vec{u}_x$. Après décollement il est porté par le vecteur $\vec{u}_2 = dx_L(-\cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y)$. D'après la relation de Chasles,



$$d\vec{\ell}_I = \vec{u}_2 - \vec{u}_1 = dx_L(1 - \cos \theta) \vec{u}_x + dx_L \sin \theta \vec{u}_y$$

Déduisons-en le travail de $\vec{F}_p$ sur I :

$$\begin{aligned} \delta W_p &= \vec{F}_p \cdot d\vec{\ell}_I \\ &= F_p(-\cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y) \cdot [dx_L(1 - \cos \theta) \vec{u}_x + dx_L \sin \theta \vec{u}_y] \end{aligned}$$

soit

$$\delta W_p = F_p dx_L (1 - \cos \theta)$$

I.A.3.b Puisque le décollement se fait de façon quasi-statique (pas d'énergie cinétique) et qu'on suppose que le ruban ne peut pas stocker d'énergie élastique, l'intégralité du travail fourni par la force $\vec{F}_p$ sert à décoller une bande de scotch de longueur dx_L et de largeur b :

$$\delta W_p = \delta W_{\text{adh}}$$

dès lors

$$F_p dx_L (1 - \cos \theta) = \gamma b dx_L$$

ce qui conduit à

$$F_p = \frac{\gamma b}{1 - \cos \theta}$$

I.A.4.a L'axe d'enroulement est fixe dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{L}$. L'angle θ étant constant, le profil du ruban est fixe, ce qui implique que le point L marquant l'intersection du front de pelage avec le plan Oxy est lui aussi fixe dans ce référentiel. Déterminons sa vitesse dans le référentiel du support $\mathcal{S}$, où O est fixe, en appliquant la loi de composition des vitesses :

$$\vec{v}_{\mathcal{L}}(L) = \vec{v}_{\mathcal{L}}(O) + \frac{d\vec{OL}}{dt} = \vec{0}$$

soit

$$\vec{V}_0 + \frac{dx_L}{dt} \vec{u}_x = \vec{0}$$

La vitesse $\vec{V}_0$ étant constante, l'intégration de cette équation différentielle donne

$$x_L(t) = -V_0 t + x_L(0) = \|\vec{V}_0\| t + x_L(0)$$

Mines Physique 1 MP 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Freulon (professeur en CPGE) ; il a été relu par Tom Morel (professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

Ce sujet porte sur un nouveau composant qui pourrait prochainement révolutionner les capacités de stockage de l'information : le memristor, sorte de résistance à effet mémoire.

- La première partie s'intéresse d'abord aux propriétés des memristors du point de vue de l'électrocinétique : quelle est l'unité d'une memristance ? comment s'exprime la memristance d'une association série ou parallèle de memristors ? Le candidat est ensuite invité à se pencher sur la caractéristique de ce dipôle pour expliquer l'effet de mémoire permanente. Si les premières questions de cette partie sont assez faciles, il n'en va pas de même pour les dernières, qui reposent sur l'analyse d'une caractéristique non linéaire.
- C'est l'étude de l'équation du mouvement des porteurs mobiles dans un conducteur qui ouvre la deuxième partie. En s'appuyant sur le modèle de Drude, on analyse successivement leur comportement vis-à-vis d'une tension continue, puis sinusoïdale. Cette approche débouche naturellement sur une analyse des transferts énergétiques de la source de tension vers les porteurs mobiles. L'effet mémoire du memristor étant dû à la migration de lacunes, qui peut également être décrite par le modèle de Drude, on s'appuie sur les résultats précédents pour interpréter le comportement du memristor. Cette partie est très classique, bien que quelques questions demandent de l'intuition.
- Dans la troisième partie, on cherche à interpréter les propriétés de transport du memristor à l'aide d'une description quantique simple. On est alors amené à exprimer les coefficients de transmission et de réflexion d'un porteur mobile sur une falaise de potentiel. Cette partie à la saveur quantique, en réalité très proche du cours de physique des ondes, est assez facile.

Alternant des questions faciles, très classiques, et d'autres beaucoup plus délicates par leur formulation ou par les capacités d'analyse qu'elles requièrent, ce sujet est déroutant dès les premières questions. Il faut savoir surmonter la première impression et ne pas se laisser déstabiliser pour pouvoir progresser. Une bonne maîtrise du cours suffit en réalité à réussir l'essentiel de l'épreuve.

INDICATIONS

Partie I

- 5 Considérer l'association série de deux memristors. Exprimer la memristance du memristor équivalent en utilisant l'additivité des tensions. Procéder de manière analogue pour l'association parallèle (cette fois, en utilisant la loi des nœuds).
- 6 Ne pas oublier la condition initiale : en $t = 0$, $q = 0$.
- 8 Pour une même valeur de i , deux valeurs de u peuvent être observées. Chacune correspond à un régime de fonctionnement. Pour trouver lequel est plutôt bloqué, comparer les pentes en chaque valeur, qui renseignent sur la résistance.
- 10 Pour répondre à cette question, il faut se rappeler que M dépend de q . Une fois i coupé, $M(q)$ conserve la même valeur qu'avant coupure.
- 13 Utiliser $E_0 \ell = u$ et $j_0 S = i$.
- 15 Montrer que $\underline{Z} = R_0 (1 + j\tau\omega)$. Quelle est l'association de deux composants simples qui conduit à la même impédance ?
- 16 La puissance exercée par la force de Lorentz électrique sur une particule est égale au produit scalaire entre la vitesse de cette particule et la force. Pour trouver la puissance volumique, il faut prendre en compte le nombre de porteurs mobiles par unité de volume, qui est lié à n .
- 17 Utiliser $E_0 \ell = u$ et $j_0 S = i$.

Partie II

- 19 Le film d'oxyde de titane peut être vu comme l'association en série de deux résistances, l'une modélisant la zone dopée et l'autre, la zone non dopée.
- 20 Pour l'interprétation, utiliser l'analogie avec la formule $\vec{v} = \mu \vec{E}_0$.
- 21 Remarquer que $Q_{\min}$ correspond à $z_0 \rightarrow 0$ et $z \rightarrow \ell$.
- 22 La memristance est la résistance du film.

Partie III

- 25 Injecter la solution de type onde stationnaire proposée dans le formulaire dans l'équation de Schrödinger.
- 26 Dans le domaine $x > 0$, $V(x) = -V_0$.
- 27 Utiliser la continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée en $x = 0$ et remarquer qu'aucune onde ne provient du côté droit.
- 28 Prendre garde que le coefficient T n'est pas juste égal à t^2 .
- 29 Les expressions de T et R obtenues sont invariantes par échange des normes des vecteurs d'onde. Cela suggère que la falaise est aussi facile à franchir dans les deux sens de propagation.

I. GÉNÉRALITÉS SUR LES MEMRISTORS

1 Rassemblons les relations demandées dans un tableau, où la résistance **R s'exprime en ohms**, la capacité **C en farads**, l'inductance **L en henrys** :

lien	résistor	condensateur	bobine
(1)	$\times$	$q = C u$	$\times$
(2)	$u = R i$	$i = C \frac{du}{dt}$	$u = L \frac{di}{dt}$
(3)	$\times$	$\times$	$\phi = L i$

2 Comme l'intensité i du courant électrique est un débit de charges,

$$i = \frac{dq}{dt}$$

L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Appliquons le théorème de Stokes sur le contour orienté $\mathcal{C}$ défini par la portion de circuit électrique aux bornes de laquelle u est appliqué. Alors,

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \iint_{S_{\mathcal{C}}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

où $S_{\mathcal{C}}$ est une surface s'appuyant sur $\mathcal{C}$. Permutons la dérivation sur le temps et l'intégration sur l'espace :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \left(\iint_{S_{\mathcal{C}}} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right)$$

Le membre de gauche est égal à $-u$ (en convention récepteur). L'intégrale dans le membre de droite est égale au flux du champ magnétique ϕ à travers le circuit. Ainsi,

$$u = \frac{d\phi}{dt}$$

3 Différentions les réponses de la question 1 :

lien	(1)	(2)	(3)
formule	$dq = C du$	$du = R di$	$d\phi = L di$

Les deux autres relations sont obtenues à l'aide des réponses de la question 2,

lien	(4)	(5)
formule	$dq = i dt$	$d\phi = u dt$

4 D'après la définition proposée,

$$[M] = \left[\frac{d\phi}{dq} \right] = \left[\frac{u dt}{i dt} \right]$$

Comme $\left[\frac{u}{i} \right] = [R]$,

M s'exprime en ohms.

5 La configuration série est décrite par le schéma électrique ci-contre. Par additivité des tensions,

$$u = u_1 + u_2$$

D'après la relation (5), on en déduit que

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi_1}{dt} + \frac{d\phi_2}{dt}$$

donc

$$M \frac{dq}{dt} = M_1 \frac{dq_1}{dt} + M_2 \frac{dq_2}{dt}$$

Comme

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{dq_1}{dt} = \frac{dq_2}{dt}$$

il s'ensuit que

$$\text{Pour une association série, } M = M_1 + M_2.$$

La configuration parallèle est décrite par le schéma électrique ci-contre. D'après la loi des nœuds,

$$i = i_1 + i_2$$

soit

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dq_1}{dt} + \frac{dq_2}{dt}$$

d'où

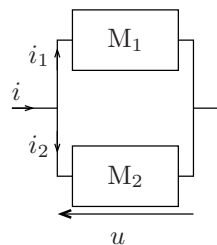
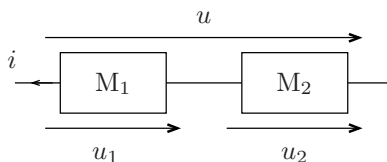
$$\frac{1}{M} \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{M_1} \frac{d\phi_1}{dt} + \frac{1}{M_2} \frac{d\phi_2}{dt}$$

Comme

$$u = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi_1}{dt} = \frac{d\phi_2}{dt}$$

il vient

$$\text{Pour une association parallèle, } \frac{1}{M} = \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}.$$



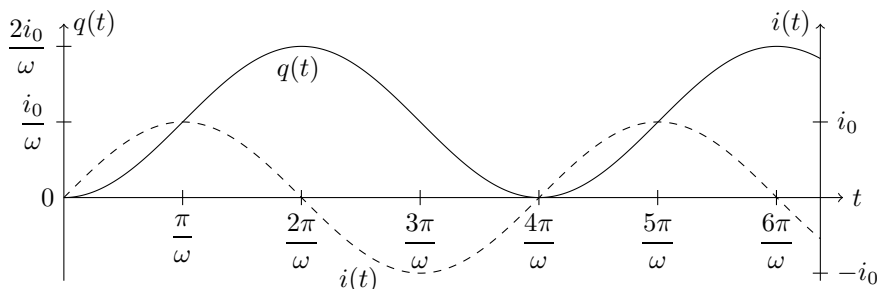
6 Puisqu'on connaît $i(t)$ et que $dq = i dt$, intégrons pour obtenir $q(t)$:

$$\int_{q(0)}^{q(t)} dq = \int_0^t i(\tau) d\tau = \left[-\frac{i_0}{\omega} \cos \omega \tau \right]_{\tau=0}^t$$

D'après les données, $q(0) = 0$, si bien que

$$q(t) = \frac{i_0}{\omega} (1 - \cos \omega t)$$

La charge $q(t)$ oscille sinusoïdalement autour de la valeur moyenne i_0/ω avec l'amplitude i_0/ω . La fonction $q(t)$ a même pulsation que $i(t)$, atteint sa valeur moyenne chaque fois que $i(t)$ est extrémale et est extrémale chaque fois que $i(t)$ s'annule. On obtient le graphe suivant :



Mines Physique 2 MP 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Pierre Tognetti (professeur agrégé) ; il a été relu par Valentin Raban (doctorant ENS Lyon) et Vincent Freulon (professeur en CPGE).

Ce sujet traite de la capacité thermique des gaz de molécules diatomiques. « Si vous voulez étudier les propriétés d'un corps et que vous ne pouvez faire qu'une seule mesure, mesurez sa capacité thermique », disait Einstein, ce qui témoigne de l'importance de ce sujet en physique.

- La première partie s'intéresse au modèle classique d'une molécule diatomique. L'énergie potentielle associée à la liaison covalente permet, par un développement limité, de se ramener au modèle d'un oscillateur harmonique. L'énergie de cet oscillateur peut alors être décomposée en trois termes indépendants : une énergie de translation, une énergie de rotation et une énergie de vibration, qui vont toutes trois contribuer à la capacité thermique du gaz.
- Dans la deuxième partie le gaz est étudié du point de vue thermodynamique. Les résultats expérimentaux de la capacité thermique de deux gaz diatomiques (le dichlore et le dihydrogène) sont comparés à ceux du modèle théorique. Les différences entre les prédictions du modèle classique et l'expérience justifient alors un traitement quantique.
- La troisième partie permet de retrouver à partir de l'équation de Schrödinger la quantification des niveaux d'énergie d'un oscillateur harmonique en régime quantique.
- Dans la quatrième partie, le gaz de molécules diatomiques est modélisé par un ensemble d'oscillateurs harmoniques indépendants de même fréquence. Ce modèle permet de déterminer l'expression de la capacité thermique molaire à volume constant du gaz en fonction de la température. Les prédictions de ce modèle sont ensuite comparées aux courbes expérimentales de la partie 2.

Les deux premières parties, très proches du cours, permettent de revoir des notions importantes de mécanique classique et de thermodynamique. Les parties 3 et 4 constituent quant à elles une bonne révision de mécanique quantique (quantification de l'énergie, oscillateur harmonique) et nécessitent une certaine dextérité dans les calculs. Les résultats principaux sont donnés dans l'énoncé, ce qui permet de ne pas rester bloqué.

INDICATIONS

Partie I

- 3 Écrire le développement limité de l'énergie potentielle au voisinage de ℓ_e .
- 5 Considérer l'air comme un gaz parfait.
- 7 Pour montrer qu'un référentiel est galiléen, il suffit de montrer qu'il est en translation rectiligne uniforme par rapport à un autre référentiel galiléen.
- 9 Développer $\vec{v} = d\vec{AB}/dt$ et substituer dans l'expression de l'énergie.

Partie II

- 10 Penser à l'indépendance des molécules de gaz dans le modèle du gaz parfait.

Partie III

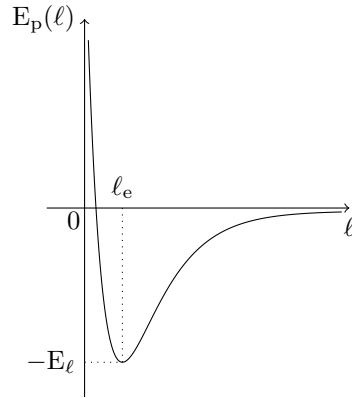
- 18 Penser que $|\Psi(x, t)|^2 dx$ représente la probabilité de présence dans un intervalle de longueur dx autour de x .
- 20 Introduire l'expression de g dans l'équation différentielle et renuméroter les indices pour regrouper les termes sous une seule somme. Exploiter le fait que la relation soit valable pour tout α .
- 21 Tronquer la série revient à imposer que le facteur devant b_p soit nul dans la relation obtenue à la question précédente.

Partie IV

- 23 La somme des probabilités vaut 1.
- 24 Faire apparaître la somme des termes d'une suite géométrique.
- 25 Réécrire le terme sous la somme sous la forme d'une dérivée par rapport à β et inverser somme et dérivée.

I. DE LA MOLÉCULE À L'OSCILLATEUR HARMONIQUE

1 L'allure de l'énergie potentielle de la molécule diatomique AB en fonction de la distance internucléaire ℓ est tracée ci-contre. À l'équilibre $dE_p/d\ell = 0$, ℓ_e correspond donc à la longueur de la liaison au minimum d'énergie potentielle. L'énergie de liaison est l'énergie à fournir à la molécule pour éloigner les deux atomes à l'infini, soit $E_\ell = E_p(+\infty) - E_p(\ell_e) = -E_p(\ell_e)$, en fixant une valeur nulle de l'énergie potentielle d'interaction des deux atomes infiniment éloignés.



À longue portée, l'énergie potentielle est négative, ce qui traduit une interaction attractive d'origine électrostatique. À courte portée, l'énergie potentielle diverge et la répulsion est d'origine purement quantique, le principe de Pauli interdisant à deux électrons d'être dans le même état quantique.

2 Les ordres de grandeur typiques sont

$$\ell_e \simeq 0,1 \text{ nm} \quad \text{et} \quad E_\ell \simeq 100 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

3 Effectuons un développement de l'énergie potentielle autour de ℓ_e à l'ordre 2

$$E_p(\ell) \simeq E_p(\ell_e) + \frac{dE_p}{d\ell}(\ell_e)(\ell - \ell_e) + \frac{1}{2} \frac{d^2E_p}{d\ell^2}(\ell_e)(\ell - \ell_e)^2$$

Or ℓ_e est la longueur d'équilibre qui correspond à un minimum d'énergie potentielle :

$$\frac{dE_p}{d\ell}(\ell_e) = 0 \quad \text{et} \quad E_p(\ell_e) = -E_\ell$$

D'où

$$E_p(\ell) = -E_\ell + \frac{1}{2} k (\ell - \ell_e)^2 \quad \text{avec} \quad k = \frac{d^2E_p}{d\ell^2}(\ell_e)$$

On reconnaît l'expression de l'énergie potentielle d'un ressort de longueur à vide ℓ_e et de constante de raideur $k = d^2E_p/d\ell^2(\ell_e)$.

Compte tenu de la convexité de la courbe on notera que $k = d^2E_p/d\ell^2(\ell_e)$ est une grandeur positive. De plus, le développement limité étant réalisé autour de la longueur d'équilibre, ce modèle ne rend compte que des mouvements de faible élongation de la liaison.

4 L'énergie cinétique E_c de la molécule AB dans le référentiel du laboratoire est la somme de l'énergie cinétique de l'atome A et de l'atome B :

$$E_c = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2$$

5 Notons U l'énergie interne de N molécules de gaz dans l'air, V la vitesse quadratique moyenne des molécules de gaz et m la masse d'une molécule. En supposant que l'air est un gaz parfait, on a

$$N E_c = U$$

soit

$$\frac{N}{2} m V^2 = \frac{3}{2} n R T$$

c'est-à-dire

$$V = \sqrt{\frac{3 R T}{M_a}} = 5 \cdot 10^2 \text{ m.s}^{-1} \quad \text{puisque } \frac{N m}{n} = M_a$$

Cette vitesse est très importante, pour comparaison un avion de ligne vole à une vitesse de croisière de l'ordre de 300 m.s^{-1} .

6 Par définition,

$$E_m = E_c + E_p$$

ainsi

$$E_m = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 - E_\ell + \frac{1}{2} k (\ell - \ell_e)^2$$

7 Appliquons le principe fondamental de la dynamique à la molécule AB dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, la molécule étant isolée.

$$m_A \frac{d\vec{v}_A}{dt} + m_B \frac{d\vec{v}_B}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

De plus, en introduisant un point O fixe dans le référentiel du laboratoire dans la relation définissant le barycentre G de la molécule

$$m_A \vec{GO} + m_A \vec{OA} + m_B \vec{GO} + m_B \vec{OB} = \vec{0}$$

que l'on dérive par rapport au temps

$$-m_A \vec{v}_G + m_A \vec{v}_A - m_B \vec{v}_G + m_B \vec{v}_B = \vec{0}$$

soit

$$m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B = (m_A + m_B) \vec{v}_G$$

Ainsi

$$(m_A + m_B) \frac{d\vec{v}_G}{dt} = m_A \frac{d\vec{v}_A}{dt} + m_B \frac{d\vec{v}_B}{dt} = \vec{0}$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{0}$$

On en déduit que le référentiel barycentrique est en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel du laboratoire supposé galiléen.

Le référentiel barycentrique de la molécule est donc galiléen.

8 Utilisons la relation de l'énergie mécanique de la molécule obtenue à la question 6

$$E_m + E_\ell = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 + \frac{1}{2} k (\ell - \ell_e)^2$$

De plus, en utilisant le théorème de Chasles dans la relation du barycentre

$$m_A \vec{GO} + m_A \vec{OA} + m_B \vec{GO} + m_B \vec{OA} + m_B \vec{AB} = \vec{0}$$

Mines Chimie MP 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Alexandre Herault (professeur en CPGE) ; il a été relu par Augustin Long (ENS Lyon) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

Ce problème s'intéresse, comme c'est souvent le cas pour cette épreuve de chimie filière MP du concours des Mines, à un élément chimique. Cette année, c'est le silicium qui est à l'honneur. Malgré la durée très courte de l'épreuve (1h30), cinq thèmes sont abordés.

- On commence par l'étude des structures électronique et cristallographique. Les questions posées sont des classiques qui reviennent tous les ans dans les différentes épreuves. On détermine la configuration électronique du silicium en utilisant sa position dans la classification périodique puis on calcule quelques paramètres géométriques de la maille cristallographique.
- La deuxième partie concerne le diagramme potentiel-pH du silicium. On attribue bien sûr les différents domaines puis on utilise la relation de Nernst en rapport avec les différentes frontières du diagramme. Comme pour la première partie, les questions posées ne sont guère originales et doivent permettre d'avancer rapidement.
- La troisième partie, qui est courte, étudie une batterie air-silicium dont l'électrolyte est un liquide ionique non aqueux. On détermine les couples mis en jeu ainsi que les demi-équations électroniques impliquées en prenant soin d'équilibrer correctement avec les anions, donnés par l'énoncé, présents dans ce liquide ionique.
- La quatrième partie, très courte elle aussi, concerne l'électrodéposition de silicium en sels fondus. On calcule ici la vitesse de croissance de la couche de silicium qui se dépose sur la cathode du dispositif.
- Enfin, la dernière partie évoque l'oxydation du silicium en silice SiO_2 . Seule la première question n'appelle pas une réponse qualitative et traite de la thermodynamique de la réaction de formation de la silice par le calcul de la constante d'équilibre ainsi que l'étude de son évolution avec la température.

En dépit du grand nombre de parties pour une épreuve aussi courte, l'énoncé n'est en réalité pas très long et il est possible de parcourir la totalité des questions posées. Malheureusement, les candidats ne pouvaient que « parcourir » à défaut de pouvoir tout traiter. En effet, seule une moitié de ce sujet correspond à ce que l'on peut réellement attendre d'un élève de la filière MP en chimie : les deux premières parties, ainsi que la première question de la dernière, sont en effet très classiques et pouvaient être traitées en intégralité, rapidement ; aucune difficulté majeure n'y est présente. Tout le reste est trop ambitieux, même si des réponses qualitatives pouvaient être données par les meilleurs candidats.

INDICATIONS

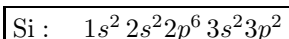
- 1 La colonne 14 de la classification est également celle du carbone.
- 2 L'atome de silicium est central dans les deux molécules. Ne pas oublier de représenter tous les doublets non liants et les charges formelles.
- 3 Chaque atome dans cette structure occupe un site tétraédrique.
- 4 Écrire la relation de contact entre deux atomes de silicium plus proches voisins. Attention, la structure n'est pas simplement cubique à faces centrées.
- 8 Utiliser les coordonnées du point D.
- 11 Les couples impliqués sont SiF_4/Si et $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$. Écrire les demi-équations électrochimiques en équilibrant avec les anions proposés.
- 12 Le solide formé est de la silice $\text{SiO}_{2(\text{s})}$. Écrire sa formation à partir de SiF_4 , d'eau, et en équilibrant avec les anions proposés.
- 13 Quelle est la conséquence de la précipitation sur la surface disponible dans les deux cas ?
- 14 La dissolution de SiCl_4 forme une espèce susceptible de s'oxyder en un composé gazeux.
- 15 Relier la variation élémentaire de charge dq à l'avancement de la réaction. Écrire ensuite la masse élémentaire de silicium déposée en utilisant l'avancement de la réaction d'une part, et les considérations géométriques d'autre part. Utiliser enfin la densité de courant surfacique pour relier tous les termes.
- 16 Calculer $\Delta_r G^\circ$ pour obtenir $\ln K^\circ$ puis $\log K^\circ$. Utiliser la relation de Van't Hoff pour déterminer comment K° varie avec la température.
- 17 Les deux régimes correspondent à la prédominance d'un des deux termes de la somme. Ne pas oublier d'interpréter qualitativement.
- 18 L'analogie évoquée consiste à dire que l'oxydation passive est celle qui conduit à une passivation de $\text{SiC}_{(\text{s})}$.
- 20 La silice recouvre le carbure de silicium. Le dioxygène doit diffuser à travers cette couche pour atteindre SiC et réagir.

AUTOUR DU SILICIUM

1 Les règles de remplissage des électrons dans les sous-couches électroniques sont :

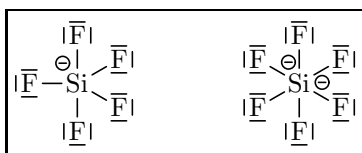
- **Règle de Klechkowski** : on remplit les sous-couches par ordre croissant de $n + \ell$, avec n croissant en cas d'égalité.
- **Règle de Hund** : lorsqu'une sous-couche est dégénérée, on place les électrons dans un maximum d'orbitales avec des spins parallèles.
- **Principe d'exclusion de Pauli** : deux électrons ne peuvent pas être décrits par le même quadruplet de nombres quantiques (n, ℓ, m_ℓ, m_s) .

Le silicium est sur la troisième ligne donc $n_{\max} = 3$; il est sur la quatorzième colonne, sa configuration de valence est donc $s^2 p^2$: il a **quatre électrons de valence**. Sa configuration électronique est



La quatorzième colonne est une colonne importante dans la classification car c'est celle du carbone. Le silicium est l'élément en dessous dans cette famille.

2 La représentation de Lewis de chaque ion est :



Dans les deux cas, le silicium est entouré de plus de quatre doublets d'électrons : il est hypervalent.

3 La coordinence est le **nombre de plus proches voisins**. Ici tous les nœuds de la structure sont dans des sites tétraédriques, **la coordinence est [4]**. La population de la maille est

$$\boxed{Z = 8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} + 4 \times 1 = 8}$$

4 La plus courte distance entre deux atomes de silicium correspond au contact entre un atome au sommet de la maille et un atome dans un site tétraédrique. Il vient, en notant a le paramètre de maille,

$$2r_{\text{Si}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

d'où

$$\boxed{a = \frac{8r_{\text{Si}}}{\sqrt{3}} \approx 540 \text{ pm}}$$

Dans une épreuve sans calculatrice, il est très important de savoir faire des applications numériques approchées. Le rapport du jury précise tous les ans que des valeurs numériques sont demandées et qu'aucun résultat ne doit être donné sous forme d'opérations non faites. On précise en remarque dans ce corrigé toutes les étapes permettant d'aboutir aux résultats numériques demandés.

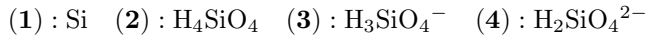
$$a = \frac{8r_{\text{Si}}}{\sqrt{3}} \approx \frac{8 \times 118 \times 4}{7} \approx 4,5 \times 120 = 540 \text{ pm}$$

5 La masse volumique du silicium est

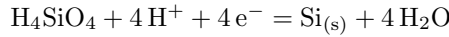
$$\rho = \frac{Z \mathcal{M}_{\text{Si}}}{N_A a^3} \approx 3.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$$

$$\begin{array}{l} \text{AN:} \quad \rho = \frac{Z \mathcal{M}_{\text{Si}}}{N_A a^3} \approx \frac{8 \times 28}{6.10^{23} \times 540^3 \times 10^{-36}} \approx \frac{8 \times 3 \times 10}{6 \times 5^3 \times 10^{-7}} \\ \text{Comme } 24 \approx 5^2, \quad \rho \approx \frac{10^8}{30} \approx 3.10^6 \text{ g.m}^{-3} \end{array}$$

6 Dans un diagramme potentiel-pH, on place les espèces les plus oxydées (nombre d'oxydation le plus grand) en haut, et les espèces les plus basiques à droite (pH le plus élevé). Ici, $\text{Si}_{(\text{s})}$ a pour nombre d'oxydation 0, alors que le silicium dans toutes les autres espèces est au nombre d'oxydation +IV (on compte -II pour O et +I pour H). Par ailleurs, H_4SiO_4 est le diacide. On en déduit l'attribution des domaines suivante :



7 La droite (DE) détermine la frontière du couple $\text{H}_4\text{SiO}_4/\text{Si}$. La demi-équation électronique correspondante est



Le potentiel de Nernst associé est, avec $c^\circ = 1 \text{ mol.L}^{-1}$,

$$E = E^\circ + \frac{0,06}{4} \log \frac{[\text{H}_4\text{SiO}_4][\text{H}^+]^4}{c^{\circ 5}}$$

$$\text{soit} \quad E = E^\circ - 0,06 \text{ pH} + \frac{0,06}{4} \log \frac{C_2}{c^\circ}$$

$$\text{d'où} \quad a = E^\circ(\text{H}_4\text{SiO}_4/\text{Si}) = -0,951 \text{ V} \quad b = -0,06 \text{ V} \quad c = 0,015 \text{ V}$$

8 En utilisant les coordonnées du point D, il vient

$$-0,996 = -0,951 + 0 + 0,015 \log \frac{C_2}{c^\circ}$$

$$\text{soit} \quad -0,045 = 0,015 \log \frac{C_2}{c^\circ}$$

Ainsi,

$$C_2 = 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

9 Les points E et F marquent les frontières entre espèces acidobasiques d'un même couple. Sur ces points, on a donc égalité des concentrations d'acide et de base conjugués. Comme

$$\text{pH} = \text{pKa} + \log \frac{[\text{base}]}{[\text{acide}]}$$

il vient, en ces points,

$$\text{pH} = \text{pKa}_i$$

d'où

$$\text{pKa}_1 = 9,8 \quad \text{et} \quad \text{pKa}_2 = 13,1$$

X/ENS Physique MP 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jimmy Roussel (professeur agrégé en école d'ingénieurs) ; il a été relu par Tom Morel (professeur en CPGE) et Louis Salkin (professeur en CPGE).

Cette année, la biophysique, une discipline encore jeune, était à l'honneur au concours X/ENS. Le sujet s'intéresse aux mécanismes mis en œuvre dans la perception auditive au sein de l'oreille interne, à un niveau cellulaire. Quand une onde sonore arrive dans l'oreille, elle fait vibrer une membrane qui porte des cellules ayant la particularité de présenter une touffe de cils microscopiques. C'est le mouvement de cette touffe ciliaire qui transforme, via l'ouverture de canaux ioniques, une onde acoustique en un signal électrique. L'objet du problème est de décrire le comportement de ce système vis-à-vis d'un stimulus, à l'aide d'un modèle simplifié : le modèle de Howard-Hudspeth. Le sujet se décompose essentiellement en deux parties.

- Une première partie étudie les propriétés de la touffe ciliaire en régime statique, c'est-à-dire pour une déflexion imposée. L'étude repose sur la loi de Boltzmann et permet de trouver « l'équation d'état » d'une touffe ciliaire, c'est-à-dire la relation entre la force moyenne appliquée et la déflexion mécanique.
- La deuxième partie cherche à décrire la dynamique de la touffe ciliaire. Dans un premier temps, on étudie le régime libre. On montre qu'il existe un régime critique pour lequel le système se met spontanément à osciller. Ensuite, on s'intéresse au comportement vis-à-vis d'un stimulus extérieur, ce qui demande de procéder à une analyse non linéaire. On explique notamment l'intérêt de se placer en régime critique. Enfin, on détaille les mécanismes physico-chimiques qui permettent à chaque cellule ciliée de fonctionner spontanément au voisinage du point critique, ce qui garantit une efficacité optimale de la transduction mécano-électrique.

Cette épreuve fait principalement appel à la physique statistique et au modèle de l'oscillateur mécanique, avec toutefois des développements de physique non linéaire. La première partie est assez simple ; la seconde demande une bonne maîtrise des équations différentielles et surtout une bonne compréhension des modélisations. Enfin, rappelons que l'usage de la calculatrice n'est pas autorisé pour les épreuves de la banque X/ENS. Il est donc utile de s'entraîner au calcul numérique, car comme le soulignent régulièrement les rapports de concours, les applications numériques sont souvent négligées alors que l'on ne demande qu'un calcul d'ordre de grandeur.

INDICATIONS

Partie I

- 0 Comparer l'énergie élastique avec $k_B T$.

Partie II

- 2 Utiliser la loi de Boltzmann et la condition de normalisation de la probabilité.
- 4.a Clarifions la question : à partir de quelle élongation un ressort ouvre le canal avec une probabilité de 50 % ? Quelle est la tension associée ?
- 5 L'intensité électrique globale est proportionnelle à p_O .
- 7 On rappelle que la moyenne d'une somme de variables aléatoires est égale à la somme des moyennes associées à chacune des variables.
- 9 Faire intervenir la fonction cosinus hyperbolique dans l'expression de $K_{HH}(x)$ facilite grandement son analyse.
- 11 Pour tracer $\Phi(x)$, se souvenir que K_{HH} donne sa dérivée.

Partie III

- 17 L'état stationnaire s'obtient en imposant $\dot{x} = \dot{x}_0 = 0$.
- 19 Rappelons qu'un système linéaire de deux équations homogènes $A X = 0$ (écriture matricielle) admet une infinité de solutions si $\det(A) = 0$.
- 24 Transformer tout d'abord le système d'équations en une équation différentielle d'ordre 2, relative à $y(t)$.
- 27 S'inspirer de la question 24 pour prévoir comment la touffe ciliaire se comporte vis-à-vis de chaque harmonique. Dans l'équation (4), remplacer $y(t)$ par l'expression proposée puis ne conserver que les harmoniques en $e^{\pm i\omega t}$.
- 30.a Utiliser l'équation (6) et le développement linéarisé de $p_O(y)$. Au voisinage du régime critique, on peut écrire

$$y(t) = y_a(t) e^{i\omega_0 t} + y_a^*(t) e^{-i\omega_0 t}$$

avec $y_a(t)$ une fonction qui évolue avec un temps caractéristique τ_0 .

- 33 Intégrer l'équation (6) entre t et $t + T_0$ et utiliser le fait qu'on se place en régime permanent.

I. QUESTION PRÉLIMINAIRE

0 Lorsqu'un ressort de raideur k subit une élongation d , son énergie potentielle élastique varie de la quantité

$$\Delta E_p = \frac{1}{2} k d^2 = 5 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

Comparons cette valeur à l'énergie d'agitation thermique $k_B T = 4 \cdot 10^{-21} \text{ J}$. ΔE_p étant comparable à $k_B T$, on ne peut avoir une approche purement mécanique. **Il faut tenir compte des fluctuations thermiques et adopter une approche de physique statistique.**

II. MODÈLE À EXTENSION FIXÉE

1 L'énergie d'un élément à l'état ouvert s'écrit

$$E_O = \varepsilon_O + \frac{1}{2} k (x - d)^2$$

Pour l'état fermé,
$$E_F = \varepsilon_F + \frac{1}{2} k x^2$$

Par conséquent,
$$E(x) = E_O - E_F$$

$$= \varepsilon + \frac{1}{2} k [(x - d)^2 - x^2]$$

$$E(x) = \varepsilon - \frac{1}{2} k d (2x - d)$$

Finalement, après factorisation par $-k d$, on obtient

$$E(x) = -\phi (x - x_0) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \phi = k d \\ x_0 = \frac{d}{2} + \frac{\varepsilon}{k d} \end{cases}$$

2 En vertu de la loi de Boltzmann, les probabilités de trouver un élément dans l'état ouvert ou fermé s'écrivent

$$p_O = A e^{-\beta E_O} \quad \text{et} \quad p_F = A e^{-\beta E_F} \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

où A est une constante que l'on obtient en normalisant la loi de probabilité :

$$p_O + p_F = 1 \quad \text{soit} \quad A = \frac{1}{e^{-\beta E_O} + e^{-\beta E_F}}$$

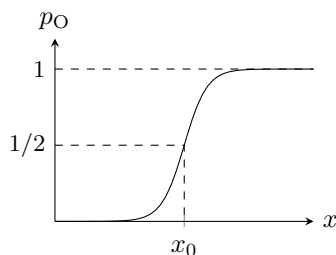
Ainsi, la probabilité p_O vaut

$$p_O = \frac{e^{-\beta E_O}}{e^{-\beta E_O} + e^{-\beta E_F}} = \frac{1}{1 + e^{\beta E}}$$

c'est-à-dire

$$p_O = \frac{1}{1 + e^{\Lambda(x-x_0)}} \quad \text{avec} \quad \Lambda = -\frac{k d}{k_B T} \quad (1)$$

3 Lorsque $x = x_0$, $p_O = 1/2$. Cela correspond à l'élongation d'un élément pour lequel on a autant de chances de trouver le canal ouvert ou fermé. Si x augmente, la probabilité p_O croît également et tend vers la valeur asymptotique $p_O = 1$. En effet, plus x augmente, plus le lien de bout de cil est en tension, ce qui favorise l'ouverture du canal. Le graphique ci-contre donne l'évolution de p_O avec x :



La probabilité varie de façon significative autour de x_0 sur une échelle caractéristique correspondant à $|\Lambda|^{-1} \simeq 2 \text{ nm}$. Numériquement, $x_0 \simeq 20 \text{ nm}$, de sorte que $p_O(0) \simeq 0$.

4.a Cherchons à partir de quelle extension un ressort ouvre le canal avec une probabilité $p_O = 0,5$. D'après la loi de probabilité (1), $p_O = 0,5$ quand

$$x_r = x_0 = \frac{\varepsilon}{kd} + \frac{d}{2}$$

La tension associée s'écrit

$$T_r = kx_r = \frac{\varepsilon}{d} + \frac{kd}{2}$$

Numériquement,

$$x_r = 2 \cdot 10^{-8} \text{ m} \quad \text{et} \quad T_r = 10^{-11} \text{ N}$$

Les cellules ciliées ont « intérêt » à imposer une tension au repos proche de celle que l'on vient de calculer afin de maximiser la sensibilité à un stimulus. En effet, la probabilité d'ouverture présente une variation maximale lorsque $x = x_0$, c'est-à-dire quand $p_O = 1/2$. Dans ce cas, toute variation de x produit une ouverture ou fermeture d'un grand nombre de canaux, ce qui induit une variation importante du signal électrique transmis aux voies nerveuses.

4.b Effectuons un calcul différentiel afin d'estimer de combien varie la probabilité d'ouverture lorsque x varie de dx au voisinage de x_0 . Commençons par en prendre le logarithme :

$$\ln p_O = -\ln [1 + e^{\Lambda(x-x_0)}]$$

puis différencions

$$\frac{dp_O}{p_O} = -\frac{\Lambda e^{\Lambda(x-x_0)} dx}{1 + e^{\Lambda(x-x_0)}}$$

La variation dx est reliée à la déflexion X via $dx = \gamma dX$. Par ailleurs, on se place au voisinage du repos, soit en $x = x_0$. Il en découle

$$dp_O = -\frac{\Lambda\gamma}{4} dX$$

Une variation $\Delta p_O = 10\%$ correspond à une variation de déflexion

$$X_0 = -\frac{4\Delta p_O}{\Lambda\gamma} = 7 \text{ nm}$$

X Physique et Sciences de l'ingénieur MP 2017

Corrigé

Ce corrigé est proposé par Olivier Frantz (professeur agrégé en école d'ingénieurs) ; il a été relu par Cyril Ravat (professeur en CPGE) et Julien Dumont (professeur en CPGE).

L'épreuve de physique et sciences de l'ingénieur est constituée de deux grandes parties indépendantes. La partie physique s'articule en deux temps, autour de la modélisation puis de l'utilisation d'un transducteur électroacoustique.

- Il s'agit tout d'abord d'établir les équations de fonctionnement en émetteur et en récepteur. Après un bilan énergétique, on cherche les positions d'équilibre puis on étudie comment celles-ci sont perturbées par l'émission ou la réception d'une onde acoustique.
- Ensuite, on s'intéresse à deux applications du transducteur, la vélocimétrie et la localisation d'une cible. Les connaissances sur la diffraction et sur les interférences sont utilisées. Le sujet propose finalement une courte partie de traitement du signal, qui est originale en prépa.

La partie sciences de l'ingénieur est consacrée aux bâtiments de grande hauteur. On distingue ici encore trois parties largement indépendantes.

- On débute par l'étude du déplacement d'une tour soumise au vent et à son poids. Plusieurs modèles sont proposés, du plus simple au plus élaboré. Citons notamment la mise en équation matricielle du mouvement de la tour discrétisée en N étages.
- Le sujet aborde ensuite le comportement de la tour soumise à une excitation sismique. Le passage d'une base de coordonnées réelles à une base de coordonnées modales est au centre des questions.
- Enfin, dans la dernière partie, sans doute plus abordable que les autres avec des questions très proches du cours, on étudie le contrôle et la commande d'un ascenseur, avec des modèles d'asservissement d'ordre 1 puis d'ordre 2.

Cette épreuve comporte de nombreuses parties indépendantes, ce qui permettait au candidat bloqué sur une question de poursuivre sur un autre thème. Elle balaie une large part du programme de physique, de sciences de l'ingénieur et même de mathématiques. La difficulté des questions est très variable, allant de la question de cours à des développements matriciels fastidieux. L'épreuve est peu guidée ; elle permettait de bien identifier les candidats ayant à la fois du recul sur le programme et une bonne maîtrise des raisonnements.

INDICATIONS

Partie Physique

- 1 Exprimer l'énergie cinétique et les énergies potentielles élastique et électrique.
- 2 Le système est le condensateur, en interaction avec le générateur électrique et la force acoustique.
- 6 Quel est l'effet d'une modification de A_0 sur la courbe $A_0G(X)$? Pour l'étude de la stabilité des positions d'équilibre, interpréter l'équation statique en termes de forces et déterminer le sens de la résultante des forces qui s'exercent après un petit déplacement.
- 7 Développer au premier ordre le produit $\Psi^2 \frac{dC}{dx}$.
- 8 Montrer qu'un terme en φ^2 remplace un terme en φ .
- 10 On peut négliger le terme d'émission lorsque l'impédance n'est pas trop élevée puisque l'émission est liée à l'amortissement.
- 13 Repartir du bilan de puissance fait à la question 2, avec une charge constante.
- 19 Utiliser directement les résultats de la diffraction.
- 21 Il s'agit d'un système analogue à un réseau de diffraction. Lorsque tous les signaux individuels sont en phase, le signal résultant est maximal.
- 22 Le retard de phase dû à la propagation vaut $\vec{k} \cdot \vec{OM}$. Le déphasage est la différence entre les retards de phase des deux ondes.
- 24 Il faut procéder à une démodulation d'amplitude par détection synchrone.
- 30 Exprimer le déphasage entre les signaux issus de deux transducteurs voisins. Il doit être nul à 2π près pour que les interférences soient constructives.
- 33 La fonction F est obtenue en déplaçant le signal émis le long de l'axe temporel avant de calculer l'intégrale. Pour simplifier, raisonner en faisant varier discrètement τ pour calculer F lorsque e_1 et r_1 sont en phase et ont 1, 2 puis N périodes en commun.

Partie Sciences de l'ingénieur

- 1 Appliquer le théorème du moment cinétique au modèle proposé.
- 4 Remarquer qu'il s'agit d'un système d'ordre 2 pseudo-périodique.
- 6 Exprimer ε en fonction de θ_0 et des autres paramètres du problème.
- 7 Faire le bilan des actions mécaniques sur la tige considérée.
- 10 Inverser la matrice $\underline{K}$ en utilisant par exemple la méthode du pivot de Gauss.
- 11 La figure 5 est erronée. Les déplacements u_1 et u_2 sont les écarts à la position d'équilibre des masses. Penser à préciser le référentiel d'étude.
- 14 Multiplier l'équation matricielle à sa gauche par la transposée d'un des vecteurs propres et utiliser les M- et K-orthogonalités des vecteurs propres.
- 15 Utiliser le formalisme complexe pour résoudre le problème posé en régime sinusoïdal forcé.
- 18 Le théorème de la valeur finale permet de répondre.
- 26 Dériver la position pour obtenir les instants pour lesquels la vitesse s'annule et en déduire la hauteur des pics.

1. PHYSIQUE

1 Le condensateur stocke de l'énergie sous forme électrique, cinétique et élastique via sa membrane déformable. Son énergie électromécanique s'écrit

$$\mathcal{E}(x, \dot{x}; Q) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C(x)} + \frac{1}{2} k x^2$$

Par définition de la capacité d'un condensateur, on a

$$Q = C \Psi$$

et l'intensité du courant vaut

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

En utilisant la formule de l'énoncé, donnant la capacité d'un condensateur plan,

$$C(x) = \frac{\varepsilon_0 S}{a + x}$$

2 Le système $\mathcal{S}$ est en interaction avec les systèmes extérieurs électrique (Ψ) et mécanique (F), desquels il reçoit de la puissance. L'effet de la gravité est négligé devant celui des autres forces. La variation d'énergie $\mathcal{E}$ entre les instants t et $t + dt$ est due au travail des forces extérieures :

$$\mathcal{E}(t + dt) - \mathcal{E}(t) = \delta W_F + \delta W_\Psi$$

On obtient le bilan de puissance en divisant par la durée dt :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathcal{P}_F + \mathcal{P}_\Psi$$

3 Exprimons les différentes puissances. Par définition, celle de la force F s'écrit

$$\mathcal{P}_F = F \dot{x}$$

et la puissance électrique $\mathcal{P}_\Psi = i \Psi = \frac{dQ}{dt} \Psi$

Or, par définition de la capacité, on a

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d(C \Psi)}{dt} = \frac{dC}{dt} \Psi + \frac{d\Psi}{dt} C = \frac{dC}{dx} \Psi \dot{x} + \frac{d\Psi}{dx} C \dot{x}$$

Par conséquent, la puissance électrique extérieure vaut

$$\mathcal{P}_\Psi = \frac{dC}{dx} \Psi^2 \dot{x} + \frac{d\Psi}{dx} C \dot{x} \Psi$$

Ensuite, grâce à la question 1, on écrit

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= \frac{1}{2} m \frac{d(\dot{x}^2)}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d(C \Psi^2)}{dt} + \frac{1}{2} k \frac{d(x^2)}{dt} \\ &= m \dot{x} \ddot{x} + \frac{1}{2} \Psi^2 \frac{dC}{dt} + C \Psi \frac{d\Psi}{dt} + k x \dot{x} \\ \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= m \dot{x} \ddot{x} + \frac{1}{2} \Psi^2 \frac{dC}{dx} \dot{x} + C \Psi \frac{d\Psi}{dx} \dot{x} + k x \dot{x} \end{aligned}$$

Avec le bilan de puissance, on conclut

$$m \dot{x} \ddot{x} + \frac{1}{2} \Psi^2 \frac{dC}{dx} \dot{x} + C \Psi \frac{d\Psi}{dx} \dot{x} + k x \dot{x} = F \dot{x} + \frac{dC}{dx} \Psi^2 \dot{x} + \frac{d\Psi}{dx} C \dot{x} \Psi$$

donc

$$m \ddot{x} + k x - \frac{1}{2} \Psi^2 \frac{dC}{dx} = F$$

Cette relation est le principe fondamental de la dynamique appliqué à la membrane souple. Trois forces entrent en jeu : l'action mécanique F de l'onde sur la membrane, le rappel élastique de la membrane souple et l'interaction électrique liée aux charges présentes sur les armatures.

Le terme $\frac{1}{2} \Psi^2 \frac{dC}{dx}$ est la force d'origine électrostatique subie par la membrane.

À partir d'une approche énergétique, on retombe sur le principe fondamental de la dynamique, qu'on n'aurait jamais pu exprimer aussi rapidement en faisant le bilan des forces puisque celle d'origine électrostatique ne s'exprime pas simplement.

4 Les énergies potentielles élastique et électrique s'écrivent respectivement

$$\mathcal{E}_k = \frac{1}{2} k x^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_\Psi = \frac{\varepsilon_0 S \Psi_0^2}{2(a+x)}$$

Le rapport de ces deux énergies est sans dimension. Exprimé en $x = a$, il est égal à A_0 .

Le terme A_0 compare les énergies potentielles élastique et électrique en $x = a$.

5 Réécrivons l'équation obtenue à la question 3 dans le cas statique, avec $F = 0$:

$$k x = \frac{1}{2} \Psi^2 \frac{dC}{dx} = -\frac{\varepsilon_0 S \Psi_0^2}{2(x+a)^2}$$

soit

$$x = -\frac{\varepsilon_0 S \Psi_0^2}{2k a^2 \left(1 + \frac{x}{a}\right)^2}$$

En posant, comme l'invite l'énoncé, $X = \frac{x}{a}$ et $A_0 = \frac{\varepsilon_0 S \Psi_0^2}{2k a^3}$, on obtient

$$X = A_0 G(X) \quad \text{avec} \quad G(X) = \frac{-1}{(1+X)^2}$$

Ce résultat correspond bien à la fonction tracée à la figure 3 de l'énoncé.

6 Puisque $G(X = 0) = -1$, on lit, au signe près, la valeur A_0 lors du croisement de la courbe avec l'axe des ordonnées :

$$A_0 = -A_0 G(0) = 0,1$$

Augmenter A_0 correspond grossièrement à dilater la courbe $A_0 G(X)$ vers le bas. Pour qu'une solution existe, il faut que cette courbe coupe la droite $y = X$. Graphiquement, en dilatant la courbe vers le bas, le point de tangence se situe autour de $X = -0,4$ soit pour

$$-0,4 = -\frac{A_0^*}{(1-0,4)^2} \quad \text{ou encore} \quad A_0^* = 0,4 \times 0,6^2 = 0,14$$